



TESE
TESE

**DIVISION DE INGENIERIA
ELECTRONICA**

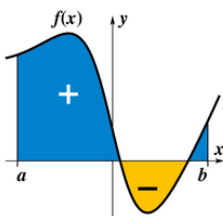
Academia de Matemáticas



Rumbo al examen de recuperación

Faus2016

**CALCULO
INTEGRAL**



Ejercicios

1ª Parte:

Diferenciales

Definición.

Supóngase que $y = f(x)$ representa una función diferenciable en un intervalo abierto que contiene a x . La **diferencial de x** (denotada por dx) es cualquier número real diferente de cero. La **diferencial de y** (denotada por dy) es.

$$dy = f'(x) dx$$

En los siguientes ejercicios use la información con el fin de evaluar y comparar Δy y dy .

1. $y = 1 - 2x^2$ $x = 2$ $\Delta x = dx = 0.1$
2. $y = x^4 + 1$ $x = -1$ $\Delta x = dx = 0.01$
3. $y = \frac{1}{x}$ $x = 2$ $\Delta x = dx = .001$

En los problemas 4 y 5 complete la tabla siguiente para cada función.

x	Δx	Δy	dy	$\Delta y - dy$
2	1			
2	0.5			
2	0.1			
2	0.01			

4. $y = 5x^2$

5. $y = \frac{1}{x}$

Encuentre la diferencial dy de la función dada.

6. $y = \sqrt{9 - x^2}$ 7. $y = \frac{1}{5} \text{Sen}\left(\frac{6\pi x - 1}{2}\right)$

8. $y = x \text{Sen} x - \text{Cos} x$ 9. $y = 8(x^3 + 5)^{1/4}$

10. $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ 11. $y = e^x \text{Ln}(x - 3)$

12. $y = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ 13. $y = \frac{\text{Sec}^2 x}{x^2 + 1}$

Utilice el concepto de diferencial para encontrar para encontrar una aproximación a la expresión dada.

14. $\sqrt{35}$

15. $\frac{1}{\sqrt{99}}$

16. $\frac{(0.9)^4}{(0.9) + 1}$

17. $\text{Tan}\left(\frac{\pi}{4} + 0.1\right)$

18. $\text{Sen } 31^\circ$

19. $(1.1)^2 + 6(1.1)^2$

20. Se encuentra que la medida del lado de un cuadrado es de 12 pulgadas, con un error posible de $\frac{1}{64}$ pulgada.

Use diferenciales para obtener una aproximación del error propagado posible en el cálculo del área del cuadrado.

21. El radio de una esfera mide 6 pulgadas, con un error posible de 0.02 pulgadas. Use diferenciales para obtener una aproximación del error máximo posible en el cálculo

del a) volumen de la esfera, b) el área superficial de esta y c) los errores relativos en los incisos a y b.

22. El alcance R de un proyectil es

$$R = \frac{v_0^2}{32} (\text{Sen } 2\theta)$$

Donde v_0 es la velocidad inicial, en pies por segundo, y θ es el ángulo de elevación. Si $v_0 = 2200$ pies por segundo y se cambia el ángulo de 10° a 11° , use diferenciales para obtener una aproximación del cambio en el alcance.

23. Un tanque de almacenamiento de aceite en forma de cilindro circular vertical tiene una altura de 5 m. El radio mide 8 m, con un error posible de ± 0.25 m. Utilice diferenciales para calcular el error máximo en el volumen. Encuentre el error relativo aproximado y el porcentaje aproximado de error.

INTEGRALES IMEDIATAS

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$$

$$u = g(x) \quad du = g'(x)dx$$

REALIZA LAS SIGUIENTES INTEGRALES

1. $\int \left(2\sqrt{t} + t - \frac{9}{t^2} \right) dt$

2. $\int (4x+1)^2 dx$

3. $\int (\sqrt{x}-1)^2 dx$

4. $\int \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}} dx$

5. $\int \frac{x^{-1} - x^{-2} + x^{-3}}{x^2} dx$

6. $\int \left(\frac{5}{\sqrt[3]{s^2}} + \frac{2}{\sqrt{s^2}} \right) ds$

7. $\int (5u-1)(3u^2+2)du$

8. $\int \frac{z}{\sqrt[3]{z^2+9}} dz$

9. $\int x^3 \sqrt{7x^2+1} dx$

10. $\int \frac{z}{\sqrt[3]{z^2+9}} dz$

11. $\int (x^2+2x-10)(5x+5)dx$

12. $\int \frac{x^2+1}{\sqrt[3]{x^3+3x-16}} dx$

13. $\int \sqrt{3-\frac{2}{v}} \frac{dv}{v^2}$

14. $\int \sqrt{\frac{x^3+1}{x^3}} \frac{dv}{x^4}$

15. $\int \sqrt[3]{\frac{1-\sqrt[3]{x}}{x^2}} dx$

16. $\int \frac{dx}{2x-1}$

17. $\int \frac{x dx}{x^2+1}$

18. $\int \frac{x^2 dx}{5x^3+8}$

19. $\int \frac{x}{x+1} dx$

20. $\int \frac{dx}{x \ln x}$

21. $\int \frac{\ln x}{x} dx$

$$22. \int \frac{dx}{x(\ln x)^2}$$

$$23. \int x^2 e^{-2x^3} dx$$

$$24. \int (2 - e^{3x})^2 dx$$

$$25. \int \frac{e^{2x}}{(1 + e^{2x})^3} dx$$

$$26. \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$$

$$27. \int \frac{e^x}{\sqrt{1 + e^x}} dx$$

$$28. \int \frac{dx}{e^x + 1}$$

$$29. \int \frac{e^{2x} dx}{e^x + 1}$$

$$30. \int \frac{e^{3x} + e^{2x}}{e^x - 1} dx$$

$$31. \int x \cos x^2 dx$$

$$32. \int x^2 \sec x^3 dx$$

$$33. \int \frac{dx}{\sec(5x+1)}$$

$$34. \int \frac{\sin 2\theta}{\cos \theta} d\theta$$

$$35. \int \frac{\csc \sqrt{x} \cot \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$$

$$36. \int \frac{\sin \frac{1}{x}}{x^2} dx$$

$$37. \int \sin^3 3x \cos x dx$$

$$38. \int \frac{\sin t}{\sqrt{4 + \cos t}} dt$$

$$39. \int \tan^2 2x \sec^2 2x dx$$

$$40. \int \tan 5v \sec 5v dv$$

$$41. \int \frac{2 + \cos x}{\sin^2 x} dx$$

$$42. \int \cos^2 \pi x dx$$

$$43. \int \frac{\cos^3 \sqrt{1-3x}}{\sqrt[3]{(1-3x)^2}} dx$$

$$44. \int \sin^3 x dx$$

$$45. \int \frac{1 - \sec x}{\cos x - 1} dx$$

$$46. \int \frac{dx}{2 \sin^2 x + 3 \cos^2 x}$$

$$47. \int \frac{dx}{1 + 25x^2}$$

$$48. \int \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}}$$

$$49. \int \frac{1 - x^2}{1 + x^2} dx$$

$$50. \int \frac{4t dt}{\sqrt{2 - 3t^2}}$$

$$51. \int \frac{e^x dx}{\sqrt{9 - e^{2x}}}$$

CONSTANTE DE INTEGRACION

52. Hallar la ecuación de la familia de curvas tales que la pendiente de la tangente en un punto cualquiera tiene el valor que se indica.

a) $\frac{x^2}{y}$ b) $\frac{1+x}{1-y}$ c) $-\frac{b^2x}{a^2y}$

53. Hallar la ecuación de la curva cuya pendiente en un punto cualquiera es la función dada, y que pasa por el punto indicado.

a) $\frac{4xy}{4x^2 - 15}$; (2, 1)

b) $x\sqrt{y}$; (1, 9)

c) $\frac{xy}{x^2 + 4}$; (1, 2)

54. Si $dy = x\sqrt{100 - x^2} dx$, $y = 0$ cuando $x = 0$. Hallar el valor de y cuando $x = 8$.

55. En cada punto de cierta curva $y'' = x$. Hallar la ecuación de la curva sabiendo que pasa por el punto (3, 0) y tiene en ese punto una pendiente de $\frac{7}{2}$.

56. En cada punto de cierta curva $y'' = \frac{12}{x^2}$.

Hallar la ecuación de la curva sabiendo que pasa por el punto (1, 0) y es tangente en ese punto a la recta $6x + y = 6$.

57. En cada punto de cierta curva $y'' = \frac{3}{\sqrt{x+3}}$.

Hallar la ecuación de la curva sabiendo que pasa por el punto (1, 1) y tiene una inclinación de 45° en ese punto.

58. En cada punto de cierta curva $y'' = \frac{1}{x}$. La curva pasa por el punto (1, 0) con inclinación de 135° . Hallar su ecuación.

2ª Parte

Métodos de Integración

INTEGRACION POR PARTES

$$\int u dv = uv - \int v du$$

59. $\int x10^{2x} dx = \frac{x10^{2x}}{2\text{Ln}10} - \frac{10^{2x}}{4(\text{Ln}10)^2} + c$

60. $\int x^2 e^{-3x} dx = -\frac{1}{3}x^2 e^{-3x} - \frac{2}{9}x e^{-3x} - \frac{2}{27}e^{-3x} + c$

61. $\int \text{Sec}^3 x dx = \frac{1}{2}\text{Sec}x \text{Tan}x + \frac{1}{2}\text{Ln}|\text{Sec}x + \text{Tan}x| + c$

62. $\int e^x \text{Cos}x dx = \frac{1}{5}e^x \text{Cos}x + \frac{2}{5}e^x \text{Sen}2x + c$

63. $\int x^2 \text{Lnx} dx = \frac{x^3}{3}\text{Lnx} - \frac{x^3}{9} + c$

64. $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2} dx = \frac{e^x}{x+1} + c$

65. $\int e^x \text{Sen}x dx = \frac{e^x}{2}(\text{Sen}x - \text{Cos}x) + C$

66. $\int x^2 \text{Sen}x dx = x(1-x)\text{Cos}x + (2x-1)\text{Sen}x + c$

67. $\int e^{2x} \text{Sen}x dx = \frac{e^{2x}}{5}(2\text{Sen}x - \text{Cos}x) + c$

68. $\int \frac{\text{Lnx}}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x}\text{Lnx} - 4\sqrt{x} + c$

69. $\int \frac{x^3}{\sqrt{4+x^2}} dx = \frac{16}{15}(4+x^2)^{3/2}(x^2-1) + C$

INTEGRALES TRIGONOMETRICAS

1. $\text{Sen}^2 x + \text{Cos}^2 x = 1$
2. $1 + \text{Tan}^2 x = \text{Sec}^2 x$
3. $1 + \text{Cot}^2 x = \text{Csc}^2 x$
4. $\text{Sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \text{Cos} 2x)$
5. $\text{Cos}^2 x = \frac{1}{2}(1 + \text{Cos} 2x)$
6. $\text{Sen} 2x = 2 \text{Sen} x \text{Cos} x$
10. $\text{Sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \text{Cos} 2x)$
11. $\text{Cos}^2 x = \frac{1}{2}(1 + \text{Cos} 2x)$

70. $\int \text{Sen}^5 x dx = -\text{Cos} x + \frac{2}{3} \text{Cos}^3 x - \frac{1}{5} \text{Cos}^5 x + c$
71. $\int 3 \text{Tg}^4 \left(\frac{x}{2}\right) \text{Sec}^2 \left(\frac{x}{2}\right) dx = \frac{6}{5} \text{Tg}^5 \left(\frac{x}{2}\right) + c$
72. $\int 4 \text{Tg} a b x \text{Sec}^2 a b x dx = \frac{2}{a b} \text{Tg}^2 a b x + c$
73. $\int \frac{\text{Sen}^3 x}{\sqrt{\text{Cos} x}} dx = -2 \sqrt{\text{Cos} x} + \frac{2}{5} (\text{Cos} x)^{5/2} + c$
74. $\int \text{Cos}^4 x dx = \frac{3x}{8} + \frac{1}{4} \text{Sen} 2x + \frac{1}{32} \text{Sen} 4x + c$
75. $\int \frac{\text{Tan}^3 x}{\sqrt{\text{Sec} x}} dx = \frac{2}{3} (\text{Sec} x)^{3/2} + \frac{2}{\sqrt{\text{Sec} x}} + c$
76. $\int \text{Sec}^4 3x \text{Tan}^3 3x dx = \frac{1}{4} \text{Tan}^4 3x + \frac{1}{6} \text{Tan}^6 3x + c$
77. $\int \text{Csc}^4 x \text{Cot}^4 x dx = -\frac{1}{5} \text{Cot}^5 x - \frac{1}{7} \text{Cot}^7 x + c$
78. $\int \frac{\text{Sec} x}{\text{Tan} x} dx = -\text{Csc} x + c$

$$79. \int \text{Sec}^4 2x dx = \frac{1}{2} \text{Tag} 2x + \frac{1}{6} \text{Tag}^3 2x + c$$

$$80. \int \text{Sen}^2 x \text{Cos}^2 x dx = \frac{1}{3} \text{Sen}^3 x - \frac{1}{5} \text{Sen} x + c$$

SUSTITUCIÓN TRIGONOMETRICA

81. $\int \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} dx = \frac{1}{2} (x^2 + 1) \arctan x - \frac{x}{2} + C$
82. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x}} = \text{Ln} \left(2\sqrt{x^2 + x} + 2x + 1 \right) + C$
83. $\int \frac{dx}{(25 - x^5)^{3/2}} = \frac{x}{25\sqrt{25 - x^2}} + C$
84. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4 - x^2}} = 2 \arcsen \frac{x}{2} - \frac{x\sqrt{4 - x^2}}{2} + C$
85. $\int \frac{dx}{x\sqrt{25 - 9x^2}} = \frac{1}{5} \text{Ln} \frac{3x}{5 + \sqrt{25 - 9x^2}} + C$
86. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 1}} = \frac{1}{2} \text{Ln} | 2x + \sqrt{4x^2 - 1} | + C$
87. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 25}} = \frac{1}{5} \text{arc sec} \frac{x}{5} + C$
88. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2 + 9}} = \frac{1}{3} \sqrt{x^2 + 9} (x^2 - 18) + C$
89. $\int \frac{dx}{\sqrt{8x - x^2}} = \arcsen \frac{x - 4}{4} + C$
90. $\int \frac{dx}{2 + x - x^2} = \frac{2}{3} \text{Ln} \left| \frac{x + 1}{\sqrt{2 + x - x^2}} \right| + C$

FRACCIONES PARCIALES

$$91. \int \frac{1}{x^2-1} dx = \frac{1}{2} \text{Ln} \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C$$

$$92. \int \frac{2x+5}{x^2+x} dx = \text{Ln} \left| \frac{x^5}{(x+1)^3} \right| + C$$

$$93. \int \frac{7x+1}{x^2+2x-3} dx = \text{Ln} \left| (x-1)^2(x+3)^5 \right| + C$$

$$94. \int \frac{7-7x}{2x^2+5x-3} dx = \text{Ln} \frac{\sqrt{2x-1}}{(x+3)^4} + C$$

$$95. \int \frac{x^2-3x-3}{x^3-9x} dx = \text{Ln} \left| \frac{x^{1/3}(x+3)^{5/6}}{(x-3)^{1/6}} \right| + C$$

$$96. \int \frac{x^3-1}{4x^3-x} dx = \frac{x}{4} + \frac{1}{16} \text{Ln} \left| \frac{x^{16}}{(2x-1)^7((2x+1)^9)} \right| + C$$

$$97. \int \frac{x^2+1}{x^2-1} dx = x + \text{Ln} \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C$$

$$98. \int \frac{x}{(x+2)^2} dx = \frac{2}{x+2} + \text{Ln}|x+2| + C$$

$$99. \int \frac{2x^2-3x-2}{(x+3)(x^2-4x+4)} dx = \text{Ln} |(x+3)(x-2)| + C$$

$$100. \int \frac{x^4-x^3+x+1}{x^3-x^2} dx = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} + 2\text{Ln} \left| \frac{x+1}{x} \right| + C$$

3ª Parte:

APLICACIONES

Integral Definida

Comprueba los resultados de las siguientes integrales evaluándolas.

$$101. \int_0^3 (3-2x+x^2) dx = 9$$

$$102. \int_1^4 (1-u)\sqrt{u} du = -\frac{116}{15}$$

$$103. \int_1^8 \sqrt{1+3x} dx = 26$$

$$104. \int_3^4 \frac{dx}{25-x^2} = \frac{1}{5} \text{Ln} \frac{3}{2}$$

$$105. \int_{-\frac{1}{2}}^0 \frac{x^3 dx}{x^2+x+1} = \frac{\sqrt{3\pi}}{9} - \frac{5}{8}$$

$$106. \int_0^1 \text{Ln}(x^2+1) dx = \text{Ln}2 + \frac{\pi}{2} - 2$$

$$107. \int_{-2}^{-1} \frac{x-1}{\sqrt{x^2-4x+3}} dx = \text{Ln} \frac{3-2\sqrt{2}}{4-\sqrt{15}} + 2\sqrt{2} - \sqrt{15}$$

$$108. \int_0^{\pi/3} x^2 \text{Sen}3x dx = \frac{1}{27}(\pi^2 - 4)$$

Áreas

En los problemas 109 al 114 calcula el área limitada por la gráfica de la función dada y el eje x en el intervalo indicado.

109. $y = x^2 - 3x$; $[0, 3]$
 110. $y = x^3 - 6x$; $[-1, 1]$
 111. $y = (x-1)(x-2)(x-3)$; $[0, 3]$
 112. $y = \frac{x^2 - 1}{x^2}$; $[1/2, 3]$
 113. $y = \sqrt[3]{x}$; $[-2, 3]$
 114. $y = -1 + \text{Sen}x$; $[-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

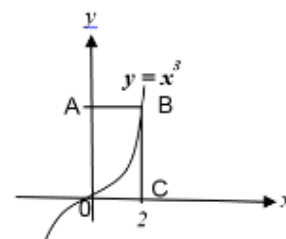
En los problemas 115 al 124 calcula el área de la región limitada por las gráficas de las funciones dadas.

115. $y = x$, $y = -2x$, $x = 3$
 116. $y = x^2$, $y = 4$
 117. $y = x^3$, $y = \sqrt[3]{x}$
 118. $y = x$, $y = 1/x^2$, $x = 3$
 119. $y = x^2 + 4x$, $y = \frac{3}{2}x$
 120. $x = y^2 + 2y + 2$, $x = -y^2 - 2y + 2$
 121. $y = x^3 - x$, $y = x + 4$, $x = -1$, $x = 1$
 122. $y = \text{Cos}x$, $y = \text{Sen}x$, $x = 0$, $x = 2\pi$
 123. $y = 2\text{Sen}x$, $y = -x$, $x = \pi/2$
 124. $y = x^2 + 10$, $y = \frac{9}{x^2}$

Volúmenes

Los problemas 125 al 130 se refieren a la figura A. utiliza el método de los discos o el de las arandelas para evaluar el volumen del sólido de revolución que se forma haciendo girar la región dada en torno a la recta indicada.

125. R_1 en torno a OC
 126. R_1 en torno a OA
 127. R_2 alrededor de OA
 128. R_2 en rededor de OC
 129. R_1 en torno a AB
 130. R_2 en torno a AB



En los problemas 131 al 142 obtén el volumen del sólido de revolución que se forma haciendo rotar la región limitada por las gráficas de las ecuaciones dadas en torno a la recta o eje indicado.

131. $y = x^2 + 1$, $x = 0$, $y = 5$; eje y
 132. $y = \frac{1}{x}$, $x = \frac{1}{2}$, $x = 3$, $y = 0$; eje x
 133. $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$; eje x
 134. $y = (x-2)^2$, $x = 0$, $y = 0$; eje x
 135. $y = 1 - x^2$, $y = x^2 - 1$; eje x
 136. $x + y = 3$, $y = 2x$, $x = 0$; eje y
 137. $y = \sqrt{x-1}$, $x = 5$, $y = 0$; $x = 5$
 138. $x^2 - y^2 = 16$, $x = 5$; eje y
 139. $y = x^2 - 6x + 9$, $y = 9 - \frac{1}{2}x^2$; eje x
 140. $y = x^3 - x$, $y = 0$, $y = 9$; eje y
 141. $y = \text{sen}x$, $y = 0$, $0 \leq x \leq \pi$; eje x
 142. $y = \tan x$, $y = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$; eje x

Integrales impropias

Calcular la integral para comprobar el resultado.

$$1. \int_0^1 \frac{3dx}{\sqrt{x}} = 6$$

$$2. \int_0^4 \frac{2dx}{\sqrt{4-x}} = 8$$

$$3. \int_0^1 \frac{dx}{1-x} = (\text{no existe})$$

$$4. \int_{-2}^2 \frac{2dx}{\sqrt{4-x^2}} = 2\pi$$

$$5. \int_0^1 Lnx dx = -1$$

$$6. \int_0^1 2xLnx dx = -\frac{1}{2}$$

$$7. \int_2^4 \frac{2dx}{x\sqrt{x^4-4}} = \frac{\pi}{3}$$

$$8. \int_0^{\pi/2} Tan\theta d\theta = \text{diverge}$$

$$9. \int_2^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} = 0$$

$$10. \int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \text{diverge}$$

$$11. \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = 1$$

$$12. \int_{-\infty}^0 Cosx dx = \text{diverge}$$

$$13. \int_{-1}^{\infty} e^{-x} dx = e$$

$$14. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x dx}{e^x + 1} = 1$$

$$15. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$$

$$16. \int_e^{\infty} \frac{dx}{x(Lnx)^3} = \frac{1}{2}$$

$$17. \int_2^{\infty} ze^{-z} dz = 3e^{-2}$$

$$18. \int_0^{\infty} e^{-x} Senx dx = \frac{1}{2}$$

$$19. \int_{1/2}^{\infty} \frac{x+1}{x^3} dx = 4$$

$$20. \int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2+6x+5} = \frac{1}{4} Ln \frac{7}{3}$$