

**TECNOLÓGICO DE ESTUDIOS SUPERIORES DE ECATEPEC  
DIRECCIÓN ACADÉMICA  
DIVISIÓN DE INGENIERÍA ELECTRÓNICA Y TELEMÁTICA**

**ACADEMIA DE COMUNICACIONES**

**APUNTES PARA LA ASIGNATURA "TEORÍA  
ELECTROMAGNÉTICA"**

**POR**

**HÉCTOR OSORIO RAMÍREZ**

**Ecatepec de Morelos, Estado de México, Febrero del 2007**

## **CONTENIDO**

### **1 Campo Electrostático y Corrientes Eléctricas Estacionarias**

- 1.1 Ley de Coulomb y Campo Eléctrico
- 1.2 Ley de Gauss
- 1.3 Potencial Eléctrico debido a diferentes distribuciones de carga. Conductores y Dieléctricos.
- 1.4 Ecuación de Poisson y Laplace (Problemas con Valores en la Frontera en Coordenadas Cartesianas, Cilíndricas y Esféricas).
- 1.5 Densidad de Corriente, Ecuación de Continuidad, Condiciones de Frontera. Ley de la Corriente de Kirchhoff, Ley de Joule.

### **2 Ecuaciones de Maxwell y Propagación de Ondas electromagnéticas**

- 2.1 Corriente de desplazamiento.
- 2.2 Forma integral y Diferencial de las Ecuaciones de Maxwell y aplicaciones.
- 2.3 Ondas Electromagnéticas Planas en medios con y sin pérdidas.
- 2.4 Potencia y Vector Poynting.
- 2.5 Reflexión de Ondas en incidencia normal y oblicua.

### **3 Líneas de Transmisión**

- 3.1 Introducción. Parámetros de las líneas de transmisión.
- 3.2 Ecuaciones de las líneas de transmisión.
- 3.3 Impedancia de entrada, Relación de onda estacionaria
- 3.4 Carta de Smith.
- 3.5 Acoplamiento de una línea de transmisión.
- 3.6 Ecuaciones de Maxwell aplicadas a líneas de transmisión.
- 3.7 Líneas de transmisión de microcintas.

### **4 Guías de Onda.**

- 4.1 Introducción a las guías de onda rectangulares.
- 4.2 Modos magnéticos transversales (TM).
- 4.3 Modos eléctricos transversales (TE)
- 4.4 Propagación de las ondas en la guía.
- 4.5 Transmisión de potencia y atenuación.

# 1. Campo Electroestático y Corrientes Eléctricas Estacionarias

## Introducción

El **Electromagnetismo** es una rama de la Física que estudia y unifica los fenómenos eléctricos y magnéticos. Ambos fenómenos se describen en una sola teoría, cuyos fundamentos fueron sentados por Faraday y formulados por primera vez de modo completo por James Clerk Maxwell. La formulación consiste en cuatro ecuaciones diferenciales vectoriales que relacionan el campo eléctrico, el campo magnético y sus respectivas fuentes materiales (corriente eléctrica, polarización eléctrica y polarización magnética), conocidas como las ecuaciones de Maxwell.

El electromagnetismo es una teoría de campos, es decir, las explicaciones y predicciones que provee se basan en magnitudes físicas vectoriales dependientes de la posición en el espacio y del tiempo. El Electromagnetismo describe los fenómenos físicos macroscópicos en los cuales intervienen cargas eléctricas en reposo y en movimiento, usando para ello campos eléctricos y magnéticos y sus efectos sobre las sustancias sólidas, líquidas y gaseosas. Por ser una teoría macroscópica, es decir, aplicable sólo a un número muy grande de partículas y a distancias grandes respecto de las dimensiones de éstas, el Electromagnetismo no describe los fenómenos atómicos y moleculares, para los que es necesario usar la Mecánica Cuántica.

### ***Desarrollo histórico de la teoría electromagnética***

Históricamente, la electricidad y el magnetismo habían sido tratados como fenómenos distintos y eran estudiados como ciencias diferentes.

Sin embargo, los descubrimientos de Oersted y luego de Ampère, al observar que la aguja de una brújula variaba su posición al pasar corriente a través de un conductor situado próximo a ella, demostraron que había alguna influencia entre ambos. También los estudios de Faraday, en el mismo campo, sugerían que la electricidad y el magnetismo eran manifestaciones de un mismo fenómeno.

La idea anterior fue propuesta y materializada por el físico inglés James Clerk Maxwell (1831-1879), quien luego de estudiar los fenómenos eléctricos y magnéticos concluyó que son producto de una misma interacción, denominada interacción electromagnética, lo que le llevó a formular, alrededor del año 1850, las ecuaciones antes citadas, que llevan su nombre, en las que se describe el comportamiento del campo electromagnético. Estas ecuaciones dicen esencialmente que:

1. Existen portadores de cargas eléctricas, y las líneas del campo eléctrico parten desde las cargas positivas y terminan en las cargas negativas.
2. No existen portadores de carga magnética; por lo tanto, el número de líneas del campo magnético que salen desde un volumen dado, debe ser igual al número de líneas que entran a dicho volumen.
3. Un imán en movimiento o, dicho de otra forma, un campo magnético variable, genera una corriente eléctrica llamada corriente inducida.
4. Cargas eléctricas en movimiento generan campos magnéticos.

El electromagnetismo ha sido la base de la llamada segunda revolución industrial, fundamentalmente en los aspectos de la conversión electromecánica de energía y las comunicaciones. Actualmente las aplicaciones electromagnéticas dominan toda la técnica moderna y la miniaturización y creciente velocidad de los circuitos electrónicos hacen cada vez más necesaria la modelación de estos fenómenos mediante la teoría de campos.

Gracias a la invención de la pila de limón, se pudieron efectuar los estudios de los efectos magnéticos que se originan por el paso de corriente eléctrica a través de un conductor.

## ***Campos eléctricos y magnéticos***

Se suele comenzar el estudio del electromagnetismo distinguiendo entre los conceptos de campo eléctrico y el campo magnético.

Un **campo eléctrico** es producido por la presencia de cargas eléctricas, las cuales crean una fuerza  $\vec{F}$ , según la ecuación

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

donde  $q$  es la carga eléctrica medida en coulombs y  $\vec{E}$  es el campo eléctrico medido en newtons por coulombios ( $\text{N C}^{-1}$ ). Esta fuerza eléctrica es la responsable de la electricidad estática y dirige el flujo de carga eléctrica en un área determinada (corriente eléctrica).

El **campo magnético** también puede ser producido por el movimiento de cargas eléctricas, o corriente eléctrica, las cuales crean la fuerza magnética (la fuerza asociada con los imanes, por ejemplo).

El término electromagnetismo proviene del hecho de que no podemos estudiar los campos eléctricos y magnéticos por separado. Un campo magnético variable produce un campo eléctrico (como ocurre en el fenómeno de inducción electromagnética, el cual es la base para el funcionamiento de generadores eléctricos, motores de inducción eléctrica y transformadores). Similarmente, un campo eléctrico variable genera un campo magnético.

Debido a esta dependencia mutua de los campos eléctricos y magnéticos, se considera lógico considerarlos como uno solo: el *campo electromagnético*. Esta unificación, la cual fue completada por Maxwell, es uno de los triunfos para los físicos del siglo XIX. Estos estudios trajeron consecuencias sumamente importantes, siendo una de ellas la explicación de la naturaleza de la luz.

Como se ha ido descubriendo, lo que percibimos como "*luz visible*" es realmente una propagación *oscilatoria* en el campo electromagnético, es decir, una *onda electromagnética*. Diferentes frecuencias de oscilación dan a lugar a las diferentes

formas de radiación electromagnética, desde las ondas de radio, de frecuencias bajas, la luz visible, de frecuencias intermedias, hasta los rayos gamma, de frecuencias más altas.

Las implicaciones teóricas del electromagnetismo llevaron a Albert Einstein a la publicación de la teoría de la relatividad especial, en 1905.

### ***Fallas del electromagnetismo clásico***

En otra publicación de 1905, Einstein puso en juego los pilares del electromagnetismo clásico. Su teoría del efecto fotoeléctrico (por el cual ganó un premio Nobel de física en 1921) proponía que la luz podría existir en cantidades en forma de partículas discretas, que más tarde serían llamadas fotones. La teoría de Einstein del efecto fotoeléctrico extendió la forma de ver la solución de la catástrofe del ultravioleta, presentada por Max Planck en 1900. En su trabajo, Planck mostró que los elementos calientes emiten radiación electromagnética en *paquetes* discretos, que conduce a una energía total finita emitida como radiación de cuerpo negro. Ambos resultados estaban en contraposición directa con el punto de vista clásico de la luz como una onda continua. Las teorías de Planck y Einstein fueron las que dieron origen a la mecánica cuántica, la cual, al ser formulada en 1925, requirió la invención de una teoría cuántica del electromagnetismo. A esta teoría, completada en la década de los 1940s, se la conoce como electrodinámica cuántica (o de sus siglas del inglés, "*QED*") y es una de las teorías más exactas que la física conoce.

## 1.1 Ley de Coulomb y Campo Eléctrico

### Carga eléctrica

La **carga eléctrica** es una propiedad intrínseca de algunas partículas sub-atómicas que se manifiesta mediante atracciones y repulsiones y que determina las interacciones electromagnéticas entre ellas. La materia cargada eléctricamente es influida por los campos electromagnéticos siendo, a su vez, generadora de ellos. La interacción entre carga y campo eléctrico es la fuente de una de las cuatro fuerzas fundamentales, la fuerza electromagnética.

La carga eléctrica es de naturaleza discreta, fenómeno demostrado experimentalmente por Robert Millikan. Por definición, los electrones tienen carga  $-1$ , también notada  $-e$ . Los protones tienen la carga opuesta,  $+1$  o  $+e$ . Los quarks tienen carga fraccionaria  $-1/3$  o  $+2/3$ , aunque no se han observado aislados en la naturaleza.

En el Sistema Internacional de Unidades la unidad de carga eléctrica se denomina culombio (símbolo C). Se define como la cantidad de carga que pasa por una sección en 1 segundo cuando la corriente eléctrica es de 1 amperio, y se corresponde con la carga de  $6,25 \times 10^{18}$  electrones aproximadamente.

### Historia

Los antiguos griegos ya sabían que al frotar ámbar con una piel, esta adquiría la propiedad de atraer cuerpos ligeros tales como trozos de paja y pequeñas semillas, fenómeno descubierto por el filósofo griego Tales de Mileto hace 2500 años.

Casi 2000 años después el médico inglés William Gilbert observó que algunos otros materiales se comportan como el ámbar al frotarlos y que la atracción que ejercen se manifiesta sobre cualquier otro cuerpo, aún cuando no sea ligero. Como la designación griega correspondiente al ámbar es *elektron*, Gilbert comenzó a utilizar el término "eléctrico" para referirse a todo material que se comportaba como aquél, lo que derivó en los términos *electricidad* y *carga eléctrica*.

Es posible observar el fenómeno descrito al frotar un lápiz con la ropa (atrae pequeños trozos de papel), al frotar vidrio con seda, o ebonita con la piel.

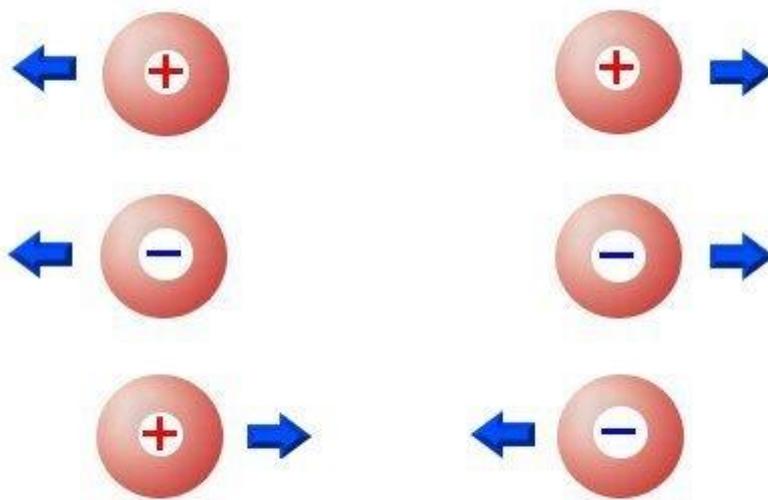
### Cargas positivas y negativas

Si se toma una varilla de vidrio y se frota con seda colgándola de un hilo largo (también de seda), se observa que al aproximar una segunda varilla (frotada con seda) se produce una repulsión mutua. Sin embargo, si se aproxima una varilla de ebonita, previamente frotada con una piel, se observa que atrae la varilla de vidrio colgada. También se verifica que dos varillas de ebonita frotadas con piel se repelen entre sí. Estos hechos se explican diciendo que al frotar una varilla se le comunica *carga eléctrica* y que las cargas en las dos varillas ejercen fuerzas entre sí.

Los efectos eléctricos no se limitan a vidrio frotado con seda o a ebonita frotada con piel. Cualquier sustancia frotada con cualquier otra, en condiciones apropiadas, recibe carga en cierto grado. Sea cual sea la sustancia a la que se le comunicó carga eléctrica se verá que, si repele al vidrio, atraerá a la ebonita y viceversa.

No existen cuerpos electrificados que muestren comportamientos de otro tipo. Es decir, no se observan cuerpos electrificados que atraigan o repelan a las barras de vidrio y de ebonita simultáneamente: si el cuerpo sujeto a observación atrae al vidrio, repelerá a la barra de ebonita y si atrae a la barra de ebonita, repelerá a la de vidrio.

La conclusión de tales experiencias es que sólo hay dos tipos de carga y que **cargas similares se repelen y cargas diferentes se atraen**. Benjamín Franklin denominó **positivas** a las que aparecen en el vidrio y **negativas** a las que aparecen en la ebonita.



### **Origen de las cargas**

Franklin, después de numerosas observaciones experimentales, descubrió que cuando se frota dos cuerpos, si uno de ellos se electriza positivamente, el otro adquiere, necesariamente, carga negativa. Así, cuando se frota vidrio con seda, además de adquirir aquél carga eléctrica positiva, la seda se electrifica negativamente.

Buscando una explicación que justificara este hecho, formuló la teoría de que estos fenómenos se producen debido a la existencia de un "fluido eléctrico" que se transfiere de un cuerpo a otro. Un cuerpo no electrizado tendría una "cantidad normal" de fluido. El frotamiento sería la causa de la transferencia y el cuerpo que recibiera más fluido quedaría electrizado positivamente mientras que el que lo perdiera quedaría electrizado negativamente. Así, conforme a estas ideas, no habría creación ni destrucción de carga eléctrica, sino únicamente una transferencia de electricidad de un cuerpo hacia otro.

En la actualidad se sabe que la teoría estaba parcialmente acertada. El proceso de electrización consiste en transferencia de carga eléctrica, pero no debido al fluido imaginado por Franklin, sino por el paso de electrones de un cuerpo hacia otro.

La teoría atómica moderna afirma que toda materia está constituida, básicamente, por partículas: protones, electrones y neutrones. Los primeros poseen carga positiva (el tipo de carga con que se electrifica el vidrio), los segundos, carga negativa (el tipo de carga con que se electrifica la ebonita) y los neutrones carecen de carga eléctrica.

Un cuerpo no electrizado posee el mismo número de electrones que de protones. Cuando se frotan dos cuerpos hay una transferencia de electrones de uno hacia otro y el cuerpo que presenta exceso de electrones queda cargado negativamente, mientras que el que los perdió presenta un exceso de protones provocando la existencia de carga eléctrica positiva.

O sea, se desplazan los electrones debido a la posición que ocupan en el átomo y por ende en la molécula que forma el material. Así, los protones quedan fijos en los núcleos atómicos, mientras que los electrones, más libres que los componentes nucleares, se desplazan de un lugar a otro.

Obsérvese que los electrones y protones no poseen en su seno nada positivo ni negativo, esto sólo es una denominación que se aplica a una propiedad intrínseca de la materia que se manifiesta mediante repulsiones y atracciones.

Otro aspecto importante del modelo de la electricidad de Franklin es que *la carga eléctrica siempre se conserva*. Es decir, cuando un cuerpo es frotado contra otro, no se crea carga en el proceso, sino que existe una transferencia de cargas entre un cuerpo y el otro.

### **Medición de la carga eléctrica**

El valor de la carga eléctrica de un cuerpo, representada como  $q$  o  $Q$ , se mide según el número de electrones que posea en exceso o en defecto.

En el Sistema Internacional de Unidades la unidad de carga eléctrica se denomina culombio (símbolo C) y se define como **la cantidad de carga que a la distancia de 1 metro ejerce sobre otra cantidad de carga igual, la fuerza de  $9 \times 10^9$  N**.

Un culombio corresponde a  $6,24 \times 10^{18}$  electrones. En consecuencia, la carga del electrón es

$$e = \frac{-1C}{6,24 \times 10^{18}} = -1,602564 \times 10^{-19}C$$

Como el culombio puede no ser manejable en algunas aplicaciones, por ser demasiado grande, se utilizan también sus submúltiplos:

$$1 \text{ miliculombio} = \frac{1C}{1.000} = 1mC$$

$$1 \text{ microculombio} = \frac{1C}{1.000.000} = 1\mu C$$

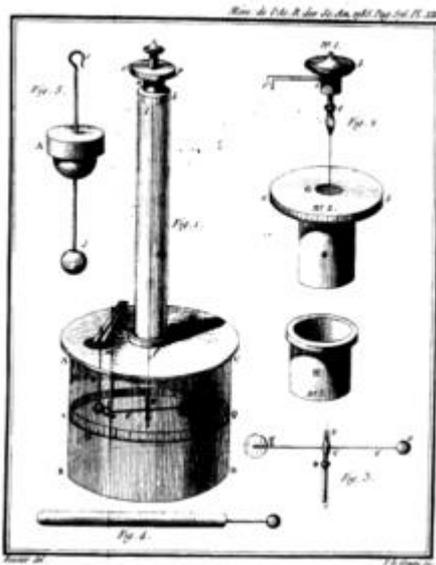
## Ley de Coulomb

Se denomina interacción electrostática a la fuerza de atracción o repulsión que se observa entre objetos con carga eléctrica, debida a la sola existencia de estas cargas, dando origen al campo electrostático. Las características cuantitativas de este fenómeno fueron estudiadas por Coulomb y Cavendish, dando origen a lo que se conoce como Ley de Coulomb.

La **ley de Coulomb** lleva su nombre en honor a Charles-Augustin de Coulomb, uno de sus descubridores y el primero en publicarlo. No obstante, Henry Cavendish obtuvo la expresión correcta de la ley, con mayor precisión que Coulomb, si bien esto no se supo hasta después de su muerte.

### Descubrimiento del fenómeno

Coulomb estudió en detalle las fuerzas de interacción entre partículas con carga eléctrica, haciendo referencia a cargas puntuales (aquellas cargas cuya magnitud es muy pequeña respecto a la distancia que los separa).



Balanza de torsión de Coulomb

Este notorio físico francés efectuó mediciones muy cuidadosas de las fuerzas existentes entre cargas puntuales utilizando una balanza de torsión similar a la usada por Cavendish para evaluar la ley de la gravitación universal.

La balanza de torsión consiste en una barra que cuelga de una fibra. Esta fibra es capaz de torcerse, y si la barra gira la fibra tiende a regresarla a su posición original. Si se conoce la fuerza de torsión que la fibra ejerce sobre la barra, se logra un método sensible para medir fuerzas.

En la barra de la balanza, Coulomb, colocó una pequeña esfera cargada y, a continuación, a diferentes distancias, posicionó otra esferita con carga de igual magnitud. Luego midió la fuerza entre ellas observando el ángulo que giraba la barra.

Dichas mediciones permitieron determinar que:

1) La fuerza de interacción entre dos cargas  $q_1$  y  $q_2$  duplica su magnitud si alguna de las cargas dobla su valor, la triplica si alguna de las cargas aumenta su valor en un factor de tres, y así sucesivamente. Concluyó entonces que el valor de la fuerza era proporcional al producto de las cargas:

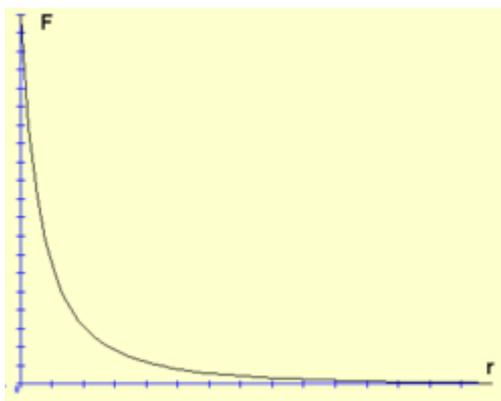
$$F \propto q_1 \quad \text{y} \quad F \propto q_2$$

en consecuencia:

$$F \propto q_1 q_2$$

2) Si la distancia entre las cargas es  $r$ , al duplicarla, la fuerza de interacción disminuye en un factor de 4; al triplicarla, disminuye en un factor de 9 y al cuadruplicar  $r$ , la fuerza entre cargas disminuye en un factor de 16. En consecuencia, la fuerza de interacción entre dos cargas puntuales, es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia:

$$F \propto \frac{1}{r^2}$$



Variación de la Fuerza de Coulomb en función de la distancia

Asociando las relaciones obtenidas en 1) y 2):

$$F \propto \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

Finalmente, se introduce una constante de proporcionalidad para transformar la relación anterior en una igualdad:

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

La creencia en la ley de Coulomb, no descansa cuantitativamente en los experimentos del mismo. Las medidas con la balanza de torsión son difíciles de hacer con una precisión de más de unos cuantos centésimos. Esas medidas no son lo suficientemente precisas como para determinar que el exponente de la ecuación de Coulomb es 2 y no fuera, por ejemplo, 2,01. El hecho es que la ley de Coulomb puede deducirse mediante experimentos indirectos que ponen de manifiesto que el exponente en cuestión debe estar comprendido entre 2,000000002 y 1,999999998<sup>[cita requerida]</sup>. No es raro, entonces, que se considere que el exponente sea exactamente 2.

### **Enunciado de la ley**

El enunciado que describe la **ley de Coulomb** es el siguiente:

*"La magnitud de cada una de las fuerzas eléctricas con que interactúan dos cargas puntuales es directamente proporcional al producto de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa."*

Esta ley es válida sólo en condiciones estacionarias, es decir, cuando no hay movimiento de las cargas o, como aproximación, el movimiento se realiza a velocidades bajas y trayectorias rectilíneas uniformes. Se le llama a esta fuerza Fuerza Electrostática. La parte *Electro* proviene de que se trata de fuerzas eléctricas y *estática* debido a la ausencia de movimiento de las cargas.

En términos matemáticos, la magnitud  $F$  de la fuerza que cada una de las dos cargas puntuales  $q_1$  y  $q_2$  ejerce sobre la otra separadas por una distancia  $r$  se expresa como:

$$F = \kappa \frac{|q_1| |q_2|}{r^2}$$

*Dadas dos cargas puntuales  $q_1$  y  $q_2$  separadas una distancia  $r$  en el vacío, se atraen o repelen entre sí con una fuerza cuya magnitud esta dada por:*

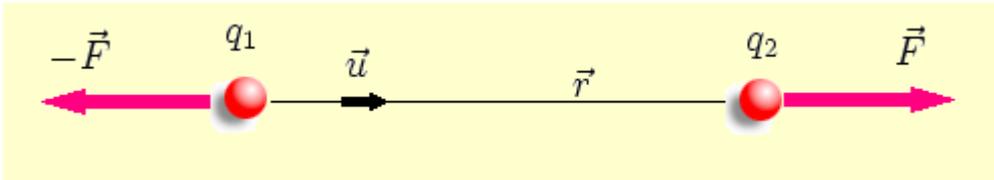
$$F = \kappa \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

La Ley de Coulomb se expresa mejor con magnitudes vectoriales:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}_r = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

donde  $\vec{u}_r$  es un vector unitario que va en la dirección de la recta que une las cargas, siendo su sentido desde la carga que produce la fuerza hacia la carga que la experimenta.

El exponente (de la distancia:  $r$ ) de la Ley de Coulomb es, hasta donde se sabe hoy en día, exactamente 2. Experimentalmente se sabe que, si el exponente fuera de la forma  $(2 + \delta)$ , entonces  $|\delta| < 10^{-16}$ .



Representación gráfica de la Ley de Coulomb para dos cargas del mismo signo.

Obsérvese que esto satisface la tercera de la ley de Newton debido a que implica que fuerzas de igual magnitud actúan sobre  $q_1$  y  $q_2$ . La ley de Coulomb es una ecuación vectorial e incluye el hecho de que la fuerza actúa a lo largo de la línea de unión entre las cargas.

### Constante de Coulomb

La constante  $k$  es la Constante de Coulomb y su valor para unidades SI es  $\frac{1}{4\pi\epsilon} \text{ Nm}^2/\text{C}^2$ .

A su vez la constante  $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$  donde  $\epsilon_r$  es la permitividad relativa,  $\epsilon_r > 1$ , y  $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$  es la permitividad del medio en el vacío.

Cuando el medio que rodea a las cargas no es el vacío hay que tener en cuenta la constante dieléctrica y la permitividad del material.

Algunos valores son:

Material	$\epsilon_r$	$\epsilon$ (F/m)	$k$ (Nm <sup>2</sup> /C <sup>2</sup> )
Vacío	1	$8,85 \cdot 10^{-12}$	$8,99 \cdot 10^9$
Parafina	2,1-2,2	$1,90 \cdot 10^{-11}$	$4,16 \cdot 10^9$
Mica	6-7	$5,76 \cdot 10^{-11}$	$1,38 \cdot 10^9$
Papel parafinado	2,2	$1,95 \cdot 10^{-11}$	$4,09 \cdot 10^9$
Poliestireno	1,05	$9,30 \cdot 10^{-12}$	$8,56 \cdot 10^9$
Baquelita	3,8-5	$3,90 \cdot 10^{-11}$	$2,04 \cdot 10^9$
C-irbolito	3-5	$3,54 \cdot 10^{-11}$	$2,25 \cdot 10^9$
Vidrio orgánico	3,2-3,6	$3,01 \cdot 10^{-11}$	$2,64 \cdot 10^9$
Vidrio	5,5-10	$6,86 \cdot 10^{-11}$	$1,16 \cdot 10^9$
Aire	1,0006	$8,86 \cdot 10^{-12}$	$8,98 \cdot 10^9$
Mármol	7,5-10	$7,75 \cdot 10^{-11}$	$1,03 \cdot 10^9$
Ebonita	2,5-3	$2,43 \cdot 10^{-11}$	$3,27 \cdot 10^9$
Porcelana	5,5-6,5	$5,31 \cdot 10^{-11}$	$1,50 \cdot 10^9$

Micalex	7-9	$7,08 \cdot 10^{-11}$	$1,12 \cdot 10^9$
Micarta A y B	7-8	$6,64 \cdot 10^{-11}$	$1,20 \cdot 10^9$
Batista barnizada	3,5-5	$3,76 \cdot 10^{-11}$	$2,11 \cdot 10^9$
Goma en hojas	2,6-3,5	$2,70 \cdot 10^{-11}$	$2,95 \cdot 10^9$
Poliestireno	2,7	$2,39 \cdot 10^{-11}$	$3,33 \cdot 10^9$

La ecuación de la ley de Coulomb queda finalmente expresada de la siguiente manera:

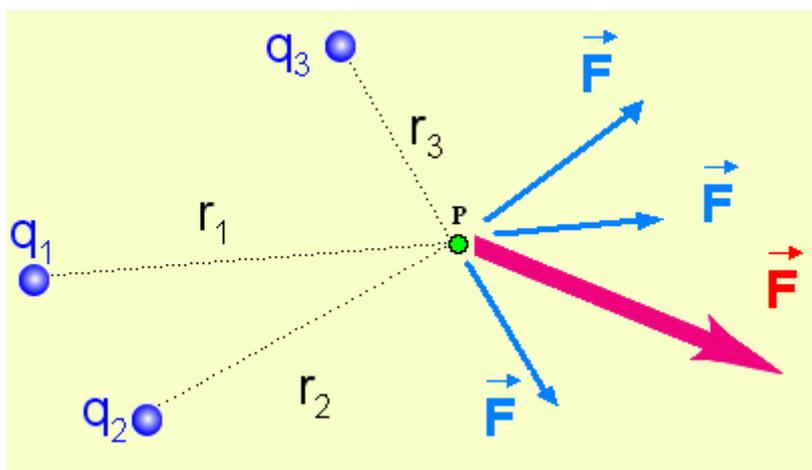
$$F = \kappa \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

### Principio de superposición y la Ley de Coulomb

Como ley básica adicional, no deducible de la ley de Coulomb, se encuentra el Principio de Superposición:

"La fuerza total ejercida sobre una carga eléctrica  $q$  por un conjunto de cargas  $q_1, q_2, q_3, \dots, q_N$  será igual a la suma vectorial de cada una de las fuerzas ejercidas por cada carga  $q_i$  sobre la carga  $q$ ."

$$\vec{F} = \sum_i^N \vec{F}_i = \sum_i^N \kappa \frac{q_i q}{r_i^2} \vec{u}_{r_i}$$



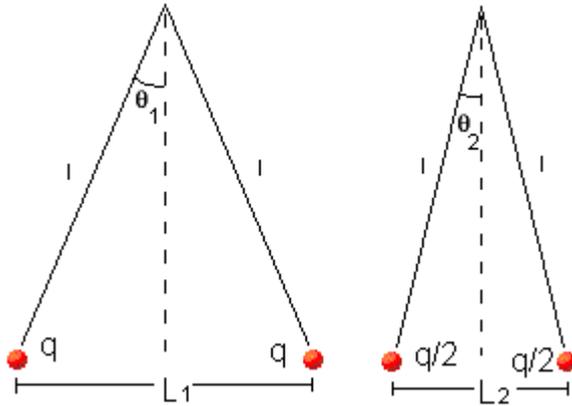
Representación gráfica del principio de superposición

Conjuntamente, la Ley de Coulomb y el Principio de Superposición constituyen los pilares de la electrostática.

## Verificación experimental de la Ley de Coulomb

Es posible verificar la ley de Coulomb mediante un experimento sencillo.

Considérense dos pequeñas esferas de masa  $m$  cargadas con cargas iguales  $q$  del mismo signo que cuelgan de dos hilos de longitud  $l$ , tal como se indica en la figura.



Sobre cada esfera actúan tres fuerzas: el peso  $mg$ , la tensión de la cuerda  $T$  y la fuerza de repulsión eléctrica entre las bolitas  $F_1$ .

En el equilibrio:

$$T \sin \theta_1 = F_1 \quad (1)$$

Y

$$T \cos \theta_1 = mg \quad (2).$$

Dividiendo (1) entre (2) miembro a miembro, se obtiene:

$$\frac{\sin \theta_1}{\cos \theta_1} = \frac{F_1}{mg} \Rightarrow F_1 = mg \cdot \tan \theta_1$$

Siendo  $L_1$  la separación de equilibrio entre las esferas cargadas, la fuerza  $F_1$  de

$$F_1 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 L_1^2}$$

repulsión entre ellas, vale, de acuerdo con la ley de Coulomb: y, por lo tanto, se cumple la siguiente igualdad:

$$\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 L_1^2} = mg \cdot \tan \theta_1 \quad (3)$$

Al descargar una de las esferas y ponerla, a continuación, en contacto con la esfera cargada, cada una de ellas adquiere una carga  $q/2$ , en el equilibrio su separación será  $L_2 < L_1$  y la fuerza de repulsión entre las mismas estará dada por:

$$F_2 = \frac{\left(\frac{q}{2}\right)^2}{4\pi\epsilon_0 L_2^2} = \frac{\frac{q^2}{4}}{4\pi\epsilon_0 L_2^2}$$

Por estar en equilibrio, tal como se dedujo más arriba:

$$F_2 = mg \cdot \tan \theta_2.$$

Y de modo similar se obtiene:

$$\frac{\frac{q^2}{4}}{4\pi\epsilon_0 L_2^2} = mg \cdot \tan \theta_2 \tag{4}$$

Dividiendo (3) entre (4), miembro a miembro, se llega a la siguiente igualdad:

$$\frac{\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 L_1^2}}{\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 L_2^2}} = \frac{mg \cdot \tan \theta_1}{mg \cdot \tan \theta_2} \implies 4 \left(\frac{L_2}{L_1}\right)^2 = \frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} \tag{5}$$

Midiendo los ángulos  $\theta_1$  y  $\theta_2$  y las separaciones entre las cargas  $L_1$  y  $L_2$  es posible verificar que la igualdad se cumple dentro del error experimental.

En la práctica, los ángulos pueden resultar difíciles de medir, así que si la longitud de los hilos que sostienen las esferas son lo suficientemente largos, los ángulos resultarán lo bastante pequeños como para hacer la siguiente aproximación:

$$\tan \theta \approx \sin \theta = \frac{L}{2l} = \frac{L}{2l} \implies \frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} \approx \frac{\frac{L_1}{2l}}{\frac{L_2}{2l}}$$

Con esta aproximación, la relación (5) se transforma en otra mucho más simple:

$$\frac{\frac{L_1}{2l}}{\frac{L_2}{2l}} \approx 4 \left(\frac{L_2}{L_1}\right)^2 \implies \frac{L_1}{L_2} \approx 4 \left(\frac{L_2}{L_1}\right)^2 \implies \frac{L_1}{L_2} \approx \sqrt[3]{4}$$

De esta forma, la verificación se reduce a medir la separación entre cargas y comprobar que su cociente se aproxima al valor indicado.

## Comparación entre la Ley de Coulomb y la Ley de la Gravitación Universal

Esta comparación es relevante ya que ambas leyes dictan el comportamiento de dos de las fuerzas fundamentales de la naturaleza mediante expresiones matemáticas cuya similitud es notoria.

La ley de la gravitación universal establece que la fuerza de atracción entre dos masas es directamente proporcional al producto de las mismas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa.

Expresándolo matemáticamente: 
$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$
 siendo  $G$  la constante de gravitación universal,  $m_1$  y  $m_2$  las masas de los cuerpos en cuestión y  $r$  la distancia entre los centros de las masas.  $G$  vale  $6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$ .

A pesar del chocante parecido en las expresiones de ambas leyes se encuentran dos diferencias insoslayables.

La primera es que en el caso de la gravedad no se han podido observar masas de diferente signo como sucede en el caso de las cargas eléctricas, y por tanto, la fuerza entre masas siempre es atractiva.

La segunda tiene que ver con los órdenes de magnitud de la fuerza de gravedad y de la fuerza eléctrica. Para aclararlo analizaremos como actúan ambas entre un protón y un electrón en el núcleo de hidrógeno.

La separación promedio entre el electrón y el protón es de  $5,3 \cdot 10^{-11} \text{ m}$ .

La carga del electrón y la del protón valen  $e^- = -1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$  y  $p^+ = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$  respectivamente y sus masas son  $m_{e^-} = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$  y  $m_{p^+} = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$ .

Sustituyendo los datos:

$$F_E = \kappa \frac{q_1 q_2}{r^2} = 8,99 \times 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} \frac{-1,6 \times 10^{-19} \text{ C} \times 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}}{5,3 \times 10^{-11} \text{ m}^2} = 8,2 \times 10^{-8} \text{ N}$$

$$F_G = G \frac{m_1 m_2}{r^2} = 6,67 \times 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \frac{9,11 \times 10^{-31} \text{ kg} \times 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}}{5,3 \times 10^{-11} \text{ m}^2} = 3,6 \times 10^{-47} \text{ N}$$

Al comparar resultados se observa que la fuerza eléctrica es de unos 39 órdenes de magnitud superior a la fuerza gravitacional.

Lo que esto representa puede ser ilustrado mediante un ejemplo muy llamativo.

1 C equivale a la carga que pasa en 1 s por cualquier punto de un conductor por el que circula una corriente de intensidad 1 A constante. En viviendas con tensiones de 220 V<sub>rms</sub>, esto equivale a un segundo de una bombilla de 220 W (120 W para las instalaciones domésticas de 120 V<sub>rms</sub>).

Si fuera posible concentrar la mencionada carga en dos puntos con una separación de 1 metro, la fuerza de interacción sería:

$$F_E = \kappa \frac{q_1 q_2}{r^2} = 8,99 \times 10^9 \frac{Nm^2}{C^2} \frac{1C \times 1C}{1m^2} = 9 \times 10^9 N$$

, o sea, ¡916 millones de kilopondios, o el peso de una masa de casi un millón de toneladas (un teragramo)!

Si tales cargas se pudieran concentrar de la forma indicada más arriba, se alejarían bajo la influencia de esta enorme fuerza, ¡aunque tuvieran que arrancarse del acero sólido para hacerlo!

Si de esta hipotética disposición de cargas resultan fuerzas tan enormes, ¿por qué no se observan despliegues dramáticos debidos a las fuerzas eléctricas? La respuesta general es que en un punto dado de cualquier conductor nunca hay demasiado alejamiento de la neutralidad eléctrica. La naturaleza nunca acumula un Coulomb de carga en un punto.

### **Limitaciones de la Ley de Coulomb**

-La expresión matemática solo es aplicable a cargas puntuales.

-La fuerza no está definida para  $r = 0$ .

## **1.2 Ley de Gauss**

la **ley de Gauss** relaciona el flujo eléctrico a través de una superficie cerrada y la carga eléctrica encerrada en esta superficie.

### **Deducción de la ley de Gauss a partir de la ley de Coulomb**

La ley de Gauss puede deducirse matemáticamente a través del uso del concepto de ángulo sólido, que es un concepto muy similar a los factores de vista conocidos en la transferencia de calor por radiación.

El ángulo sólido  $\Delta\Omega$  que es subtendido por  $\Delta A$  sobre una superficie esférica, se define como:

$$\Delta\Omega = \frac{\Delta A}{r^2}$$

siendo  $r$  el radio de la esfera.

como el área total de la esfera es  $4\pi r^2$  el ángulo sólido para “toda la esfera” es:

$$\Delta\Omega = \frac{\Delta A}{r^2} = \frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi$$

la unidad de este ángulo es el estereorradián (sr)

Si el área  $\Delta A$  no es perpendicular a las líneas que salen del origen que subtende a  $\Delta\Omega$ , se busca la proyección normal, que es:

$$\Delta\Omega = \frac{\Delta A \hat{n} \cdot \hat{r}}{r^2} = \frac{\Delta A \cos \theta}{r^2}$$

Si se tiene una carga  $q$  rodeada por una superficie cualquiera, para calcular el flujo que atraviesa esta superficie es necesario encontrar  $\vec{E} \cdot \hat{n} \Delta A$  para cada elemento de área de la superficie, para luego sumarlos. Como la superficie que puede estar rodeando a la carga puede ser tan compleja como quiera, es mejor encontrar una relación sencilla para esta operación:

$$\Delta\phi = \vec{E} \cdot \hat{n} \Delta A = \frac{Kq}{r^2} \hat{r} \cdot \hat{n} \Delta A = Kq \Delta\Omega$$

De esta manera  $\Delta\Omega$  es el mismo ángulo sólido subentendido por una superficie esférica. como se mostró un poco más arriba  $\Delta\Omega = 4\pi$  para cualquier esfera, de cualquier radio. de esta forma al sumar todos los flujos que atraviesan a la superficie queda:

$$\phi_{neto} = \oint_{S.C.} \vec{E} \cdot \hat{n} dA = Kq \oint_{S.C.} d\Omega = 4\pi kq = \frac{q}{\epsilon_0}$$

que es la forma integral de la ley de Gauss.

### Interpretación

La ley de Gauss puede ser utilizada para demostrar que no existe campo eléctrico dentro de una jaula de Faraday sin cargas eléctricas en su interior. La ley de Gauss es la equivalente electrostática a la ley de Ampere, que es una ley de magnetismo. Ambas ecuaciones fueron posteriormente integradas en las ecuaciones de Maxwell.

Esta ley puede interpretarse, en electrostática, entendiendo el flujo como una medida del número de líneas de campo que atraviesan la superficie en cuestión. Para una carga puntual es evidente que este número es constante si la carga está contenida por la superficie y es nulo si esta fuera (ya que hay el mismo número de líneas que entran como que salen). Además, al ser la densidad de líneas proporcionales a la magnitud de la carga, resulta que este flujo es proporcional a la carga, si está encerrada, o nulo, si no lo está.

Cuando tenemos una distribución de cargas, por el principio de superposición, sólo tendremos que considerar las cargas interiores, resultando la ley de Gauss.

Sin embargo, aunque esta ley se deduce de la ley de Coulomb, es más general que ella, ya que se trata de una ley universal, válida en situaciones no electrostáticas en las que la ley de Coulomb no es aplicable

### Forma integral de la ley de Gauss

Su forma integral utilizada en el caso de una distribución extensa de carga puede escribirse de la manera siguiente:

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV = \frac{Q_A}{\epsilon_0}$$

donde  $\Phi$  es el flujo eléctrico,  $\vec{E}$  es el campo eléctrico,  $d\vec{A}$  es un elemento diferencial del área  $A$  sobre la cual se realiza la integral,  $Q_A$  es la carga total encerrada dentro del área  $A$ ,  $\rho$  es la densidad de carga en un punto de  $V$  y  $\epsilon_0$  es la permitividad eléctrica del vacío.

### Forma diferencial de la ley de Gauss

En su forma diferencial, la ecuación se convierte en:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

donde  $\vec{D}$  es el campo de desplazamiento eléctrico (en C/m<sup>2</sup>), y  $\rho$  es la densidad de carga eléctrica. Esta forma diferencial se obtiene a partir del teorema de Gauss de la divergencia.

Para materiales lineales, la ecuación es:

$$\nabla \cdot \epsilon \vec{E} = \rho$$

donde  $\epsilon$  es la permitividad eléctrica.

## 1.3 Potencial Eléctrico debido a diferentes distribuciones de carga. Conductores y Dieléctricos.

El potencial eléctrico ( $V$ ) en un punto es el Trabajo requerido para mover una carga unitaria  $q$  (energía o trabajo por unidad de carga) desde ese punto hasta el infinito, donde el potencial es 0. Matemáticamente se expresa por:

$$V = \frac{W}{q}$$

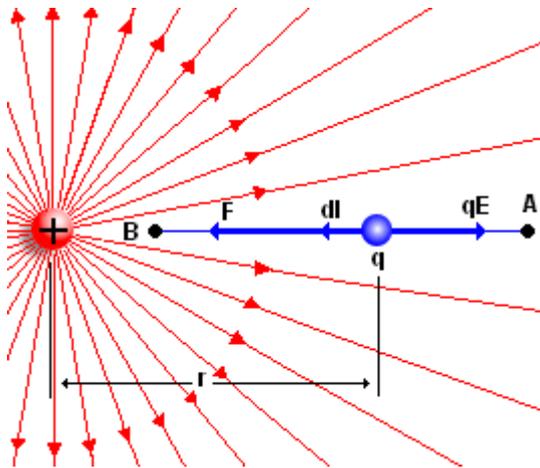
La energía por unidad de carga por lo general es más útil para aplicaciones eléctricas que la energía potencial mutua. Esta magnitud se determina utilizando una carga de prueba positiva, la cual se puede utilizar para hacer el mapeo de un campo eléctrico. Para tal carga de prueba  $q_0$  localizada a una distancia  $r$  de una carga  $q$ , la energía potencial electrostática mutua es:

$$U = \frac{K q_0 q}{r}$$

$$V = \frac{U}{q_0} = \frac{kq}{r}$$

De manera equivalente, el **potencial eléctrico** es

### Potencial debido a una carga puntual



Una carga de prueba  $q$ , se mueve, mediante un agente exterior de A hasta B en el campo producido por una carga  $q_0$

Considérense los puntos A y B y una carga puntual  $q$  tal como muestra la figura. Según se muestra,  $\vec{E}$  apunta a la derecha y  $\vec{dl}$ , que siempre está en la dirección del movimiento, apunta a la izquierda. Por consiguiente:

$$\vec{E} \cdot \vec{dl} = E \cos 180^\circ dl = -E dl$$

Ahora bien, al moverse la carga una trayectoria  $dl$  hacia la izquierda, lo hace en la dirección de la  $r$  decreciente porque  $r$  se mide a partir de  $q$  como origen. Así pues:

$$\vec{E} \cdot \vec{dl} = E dr$$

Por lo cual:

$$V_A - V_B = - \int_A^B \vec{E} \cdot \vec{dl} = - \int_{r_A}^{r_B} E dr$$

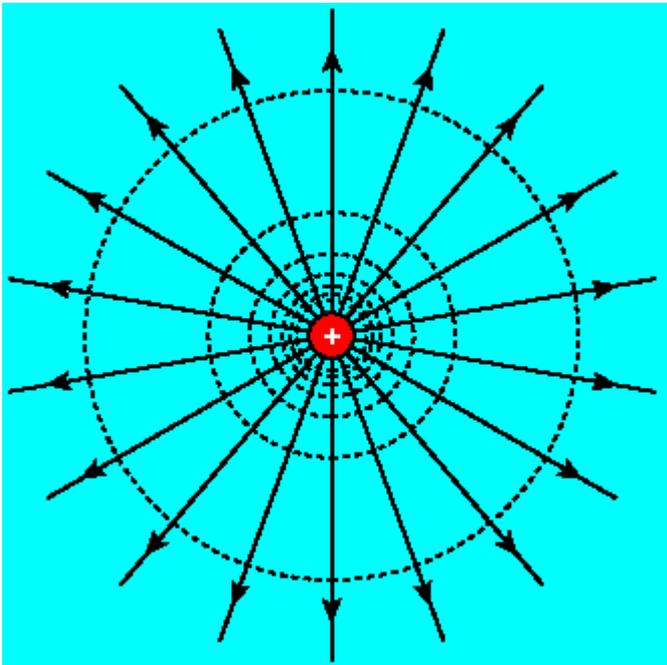
Combinando esta expresión con la de E para una carga punto se obtiene:

$$V_A - V_B = -\frac{q}{4\pi\epsilon} \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left( \frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right)$$

Escogiendo el punto de referencia A en el infinito, esto es, haciendo que  $r_A \rightarrow \infty$ , considerando que  $V_A = 0$  en ese sitio y eliminando el subíndice B, se obtiene:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q}{r}$$

Esta ecuación muestra claramente que las superficies equipotenciales para una carga puntual aislada son esferas concéntricas a la carga puntual.



Superficies equipotenciales producidas por una carga puntual

### Potencial debido a dos cargas puntuales

El potencial en un punto P debido a dos cargas es la suma de los potenciales debido a cada carga individual en dicho punto.

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_1}{r_1} + \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_2}{r_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left( \frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} \right)$$

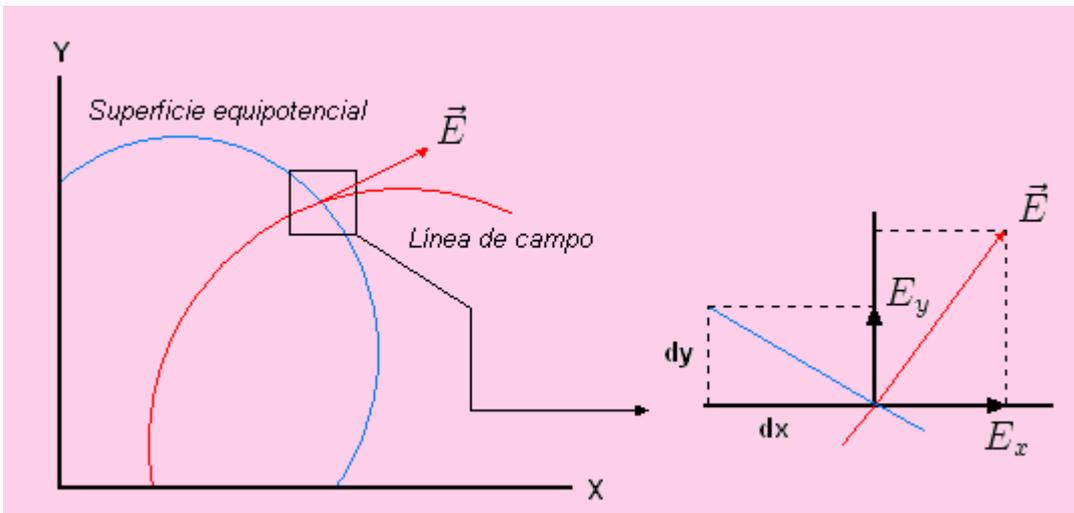
Siendo  $r_1$  y  $r_2$  las distancias entre las cargas  $q_1$  y  $q_2$  y el punto P respectivamente.

## Potencial eléctrico generado por una distribución discreta de cargas

El potencial en un punto cualquier debido a un grupo de cargas punto se obtiene calculando el potencial  $V_n$  debido a cada carga, como si las otras cargas no existieran, y sumando las cantidades así obtenidas, o sea:

$$V = \sum_n V_n = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_n \frac{q_n}{r_n}$$

siendo  $q_n$  el valor de la  $n$ -ésima carga y  $r_n$  la distancia de la misma al punto en cuestión. La suma que se efectúa es una suma algebraica y no una suma vectorial. En esto estriba la ventaja de cálculo del potencial sobre la de intensidad del campo eléctrico. Las superficies equipotenciales cortan perpendicularmente a las líneas de campo. En el gráfico se representa la intersección de las superficies equipotenciales con el plano XY.



La ecuación de las líneas equipotenciales es:

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{E_y}{E_x}$$

## Potencial eléctrico generado por una distribución continua de carga

Si la distribución de carga es continua y no una colección de puntos, la suma debe reemplazarse por una integral:

$$V = \int dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r}$$

siendo  $dq$  un elemento diferencial de la distribución de carga,  $r$  su distancia al punto en el cual se calcula  $V$  y  $dV$  el potencial que  $dq$  produce en ese punto.

## Potencial eléctrico generado por un plano infinito

Un plano infinito con densidad de carga de superficie  $\sigma$  crea un potencial eléctrico saliente en la dirección perpendicular al plano de valor constante

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

Si  $x$  es la dirección perpendicular al plano y éste se encuentra en  $x=0$  el potencial eléctrico en todo punto  $x$  es igual a:

$$V(x) = -\frac{\sigma x}{2\epsilon_0}.$$

Donde se ha considerado como condición de contorno  $V(x)=0$  en  $x=0$

## Esfera conductora cargada

Sea  $Q$  la carga total almacenada en la esfera conductora. Por tratarse de un material conductor las cargas están situadas en la superficie de la esfera siendo neutro su interior.

**Potencial en el exterior de la corteza:** El potencial en el exterior de la corteza es equivalente al creado por una carga puntual de carga  $Q$  en el centro de la esfera

$$V = \frac{KQ}{r}.$$

donde  $r$  es la distancia entre el centro de la corteza y el punto en el que medimos el potencial eléctrico.

$$V = \frac{KQ}{R}.$$

Donde  $R$  es el radio de la esfera.

## 1.4 Ecuación de Poisson y Laplace (Problemas con Valores en la Frontera en Coordenadas Cartesianas, Cilíndricas y Esféricas).

En problemas de electrostática en donde se conoce la distribución de carga,  $\rho(\mathbf{r}')$ , la determinación del potencial electrostático,  $V(\mathbf{r})$ , y del campo eléctrico,  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ , se realiza en forma directa mediante la integración respectiva:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} dv', \quad (1)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} dv'. \quad (2)$$

De manera alternativa, si se conoce al potencial eléctrico, el campo eléctrico se obtiene a través de la relación:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r}). \quad (3)$$

Esta relación surge del hecho de que el campo electrostático es conservativo, es decir de la ecuación de campo

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}. \quad (4)$$

### Ecuación de Poisson

Se puede intentar resolver los problemas electrostáticos mediante otro enfoque, derivado a partir de las ecuaciones de campo (ec. 4 y la Ley de Gauss para el vector de Desplazamiento Eléctrico). Considerando medios eléctricos lineales, La Ley de Gauss para el Desplazamiento Eléctrico se puede expresar en términos de la permitividad eléctrica del material,  $\epsilon$ , como:

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon}; \quad (5)$$

al sustituir al campo eléctrico en función del potencial eléctrico se obtiene:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot [-\nabla V(\mathbf{r})] &= \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon} \\ \nabla^2 V(\mathbf{r}) &= -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon}. \end{aligned} \quad (6)$$

La ecuación 6 se conoce como la Ecuación de Poisson, y es una ecuación en derivadas parciales cuya solución se debe ajustar a condiciones de frontera específicas de cada situación a analizar. La forma que toma el operador laplaciano corresponde al sistema de coordenadas en particular que se utilice; la ventaja de un sistema de coordenadas sobre otro reside en el aprovechamiento de factores tales como las simetrías geométricas de cada caso.

### Ecuación de Laplace

Si la carga está confinada a superficies conductoras o es una distribución de cargas puntuales en el espacio, la función de distribución de carga es cero en una región del espacio que puede resultar grande. Para esta región donde  $\rho(\mathbf{r})$  es nula, la ecuación de Poisson se reduce a:

$$\nabla^2 V(\mathbf{r}) = 0. \quad (7)$$

La ecuación 7 se conoce como la Ecuación de Laplace. La solución de la Ecuación de Laplace, al igual que la Ecuación de Poisson, se debe de ajustar a las condiciones sobre la frontera.

## 1.5 Densidad de Corriente, Ecuación de Continuidad, Condiciones de Frontera. Ley de la Corriente de Kirchhoff, Ley de Joule.

### Corriente Eléctrica

Una corriente eléctrica es, simplemente, el movimiento de cargas eléctricas. Definimos la corriente eléctrica  $I$ , como la carga eléctrica  $dQ$  que pasa a través de una sección de área  $A$  de conductor, por unidad de tiempo  $dt$ ,

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

La corriente eléctrica  $I$  se mide entonces en coulomb por segundo (ampere) ( $1 \text{ A} = 1 \text{ Cb/seg}$ ). Notemos que, de acuerdo a nuestra definición, tanto los portadores de carga positiva como negativa contribuyen a la corriente en el mismo sentido (del mismo signo).

### Densidad de corriente

De la definición anterior resulta claro que la corriente que pasa por una sección dada de conductor depende tanto del número de portadores de carga como de su velocidad. Consideremos un conjunto de cargas que se mueven todas con la misma velocidad  $v$  (tienen la misma carga  $q$ ). Supongamos que hay  $n$  cargas por unidad de volumen.

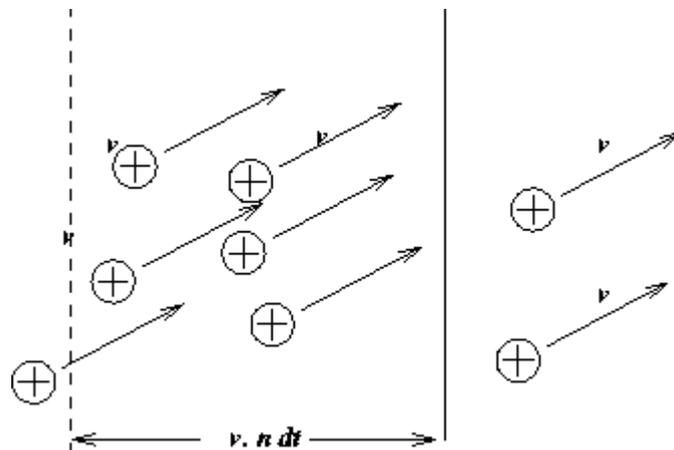


Figure 1.5.1: Definición de densidad de corriente.

En un intervalo de tiempo  $dt$ , las cargas se mueven una distancia  $v dt$ ; por lo tanto la cantidad de carga que pasa por el ara  $A$  es  $dQ$ ,

$$dQ = q n ( v dt A ) ,$$

por lo tanto, la corriente que pasa por el area  $A$  es

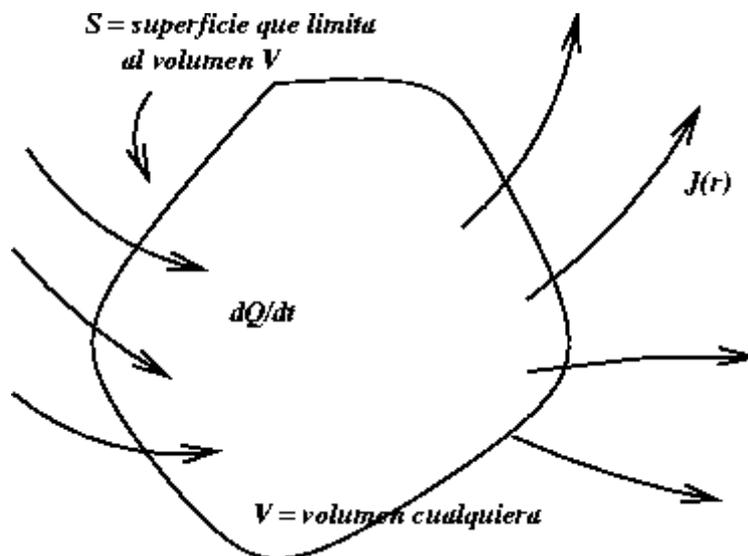
$$I = n q v A .$$

Se define entonces la densidad de corriente,  $\vec{J}$ , tal que

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

### Conservación de la carga Eléctrica

La carga neta en cualquier región del espacio se conserva constante. Este principio fundamental se expresa matemáticamente en la ecuación de continuidad: Consideremos un elemento de volumen  $V$ , cualquiera, limitado por la superficie  $S$ ,



**Figure 1.5.2:** Balance de carga eléctrica en un volumen. El cambio de le carga en una región es debido a la corriente que sale a través de la superficie  $S$  que limita el volumen  $V$ .

La corriente que sale del volumen  $V$ , lo hace sólo a través de  $S$ ,

$$I = \int \vec{J} \cdot d\vec{S},$$

por el principio de conservación, la corriente que sale del volumen  $V$ , se debe a un decrecimiento de la carga contenida en  $V$ ,  $I = -dQ/dt$ . Por otra parte,

$$Q = \int \rho(\vec{r})dV,$$

Luego, como  $V$  es un volumen cualquiera, se tiene la ecuación de continuidad.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

### Condiciones de Frontera

Las condiciones de frontera son clasificadas en dos formas:

- (a) Condiciones de Dirichlet, en donde se conoce el valor del potencial eléctrico en la frontera,  $V(\mathbf{r})$ ;
- (b) Condiciones de Neumann, en donde se conoce al campo eléctrico normal a la superficie de la frontera.

En particular el campo eléctrico normal a la superficie, utilizando la relación con el potencial eléctrico (ec. 3), con  $\mathbf{N}$  el vector normal unitario, se transforma en:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{N} &= -\nabla V(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{N} \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{N} &= -\frac{\partial V(\mathbf{r})}{\partial N}. \end{aligned} \tag{8}$$

Es decir que las Condiciones de Neumann se traducen a la derivada direccional del potencial eléctrico en la dirección normal a la superficie frontera.

Las condiciones de frontera entre dos medios, dieléctrico-dieléctrico o conductor-dieléctrico, se derivan de las ecuaciones de campo (ecs. 4 y 5), en su forma integral, respectivamente:

$$\oint_C \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 0, \tag{9}$$

$$\oint_S \varepsilon \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{a} = Q. \tag{10}$$

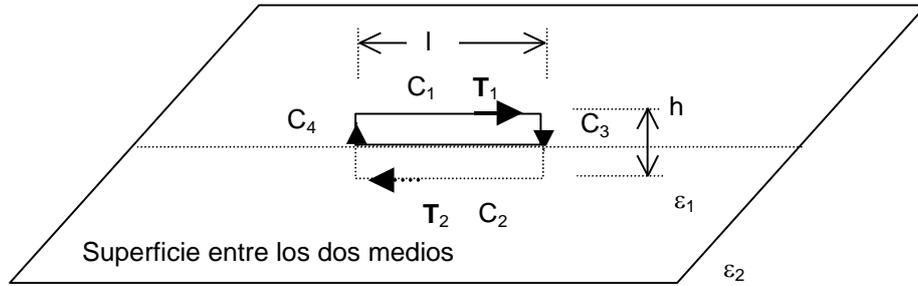
Primero, consideremos que tenemos dos medios con permitividades eléctricas  $\epsilon_1$  y  $\epsilon_2$ , como se muestra en la figura 1. Para aplicar la ecuación de campo 9, construimos una trayectoria cerrada  $C$  entre los dos medios compuesta de cuatro segmentos. Si suponemos que los segmentos 1 y 2 tienen una longitud  $l$  pequeña, entonces la magnitud del campo eléctrico en cada uno de ellos es prácticamente constante; mientras que si la longitud  $h$  de los segmentos 3 y 4 se hace tender a cero, entonces la integración sobre esas partes de la trayectoria será nula, quedando:

$$\int_{C_1} \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{T}_1 d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{T}_2 d\mathbf{r} = 0$$

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{T}_1 \int_{C_1} d\mathbf{r} + \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{T}_2 \int_{C_2} d\mathbf{r} = 0;$$

en donde  $\mathbf{T}_1$  y  $\mathbf{T}_2$  son los vectores unitarios tangentes a los segmentos de trayectoria  $C_1$  y  $C_2$ , respectivamente. Como  $\mathbf{T}_2 = -\mathbf{T}_1$ , y cada una de las integrales es igual a la longitud del segmento de trayectoria, queda entonces:

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{T}_1 - \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{T}_1 = 0.$$



**Figura 1.** Trayectoria cerrada entre dos medios dieléctricos.

Es decir que la condición de frontera en la superficie frontera entre los dos medios, para las componentes tangentes del campo eléctrico, es:

$$E_{1T}(\mathbf{r}) = E_{2T}(\mathbf{r}). \quad (11)$$

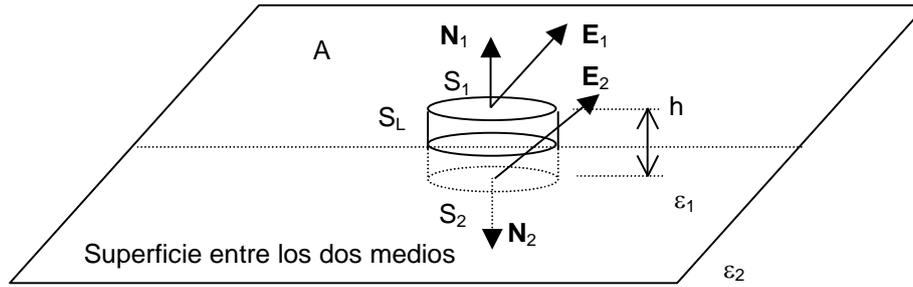
Por otra parte, para aplicar la Ley de Gauss (ec. 10), necesitamos construir una superficie cerrada entre los dos medios, como se indica en la figura 2. Consideremos que la superficie cerrada está compuesta por dos tapas paralelas a la superficie frontera (una en cada medio),  $S_1$  y  $S_2$ , y una superficie lateral que une a las dos tapas,  $S_L$ . Si se supone que el área  $A$  de las tapas es pequeña, de tal manera que el campo eléctrico en cada una de ellas es prácticamente constante; y que la longitud  $h$  de la parte lateral tiende a cero, de tal forma que el flujo de campo eléctrico a través de ella es nulo, entonces la integral en la Ley de Gauss, queda

$$\int_{S_1} \varepsilon_1 \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{N}_1 da + \int_{S_2} \varepsilon_2 \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{N}_2 da = Q,$$

$$\varepsilon_1 \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{N}_1 \int_{S_1} da + \varepsilon_2 \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{N}_2 \int_{S_2} da = Q,$$

en donde  $\mathbf{N}_1$  y  $\mathbf{N}_2$  son los vectores normales a la superficie frontera en cada medio, con  $\mathbf{N}_2 = -\mathbf{N}_1$ . Las integrales son iguales al área, y la carga  $Q$  encerrada dentro de la superficie cerrada dividida entre el área  $A$  es la densidad superficial de carga,  $s(\mathbf{r})$ , entonces se tiene:

$$\varepsilon_1 \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{N}_1 - \varepsilon_2 \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{N}_1 = \sigma(\mathbf{r}).$$



**Figura 2.** Superficie cerrada entre dos medios con propiedades eléctricas diferentes.

Es decir que la condición de frontera para las componentes normales del campo eléctrico en la superficie frontera está relacionada con la densidad de carga superficial:

$$\varepsilon_1 E_{1N}(\mathbf{r}) - \varepsilon_2 E_{2N}(\mathbf{r}) = \sigma(\mathbf{r}). \quad (12)$$

En el caso de medios dieléctrico-dieléctrico, con densidad de carga superficial nula, se tiene que las condiciones de frontera para las componentes tangenciales y normales del campo eléctrico son, respectivamente:

$$E_{1T}(\mathbf{r}) = E_{2T}(\mathbf{r}), \quad (13.a)$$

$$\varepsilon_1 E_{1N}(\mathbf{r}) = \varepsilon_2 E_{2N}(\mathbf{r}). \quad (13.b)$$

En el caso de medios dieléctrico-conductor, las condiciones de frontera para las componentes del campo eléctrico tangencial y normal son, respectivamente:

$$E_{1T}(\mathbf{r}) = 0, \quad (14.a)$$

$$\varepsilon_1 E_{1N}(\mathbf{r}) = \sigma(\mathbf{r}). \quad (14.b)$$

También es conveniente recordar que las superficies conductoras son superficies equipotenciales, por lo que se puede establecer condiciones de frontera en términos de los potenciales de los conductores, en lugar de la condición 14.a. En general, la condición de frontera 11, para las componentes tangenciales del campo eléctrico se refiere como una condición de frontera directa para el potencial eléctrico (Dirichlet).

### Leyes de Kirchoff

Se trata de dos 'reglas' que permiten estudiar circuitos en forma sistemática. Estas reglas se deducen en forma directa de las ecuaciones de campo. Para formular las leyes se necesita definir algunos conceptos:

- i) Circuito: Un camino conductor, en el que se encuentran fuentes de 'fem' (baterías).
- ii) Nudo o Nodo: Puntos en un circuito en los que se unen al menos tres conductores.

- Ley de Nodos: Se deduce de la ecuación de continuidad -régimen permanente-. "La suma algebraica de las corrientes que entran a un nodo es siempre cero."
- Ley de Mallas: Se deduce de la 'relación fundamental', discutida recientemente : `En toda trayectoria cerrada en un circuito, la suma algebraica de las 'fem' y las caídas de potencial ( $RI$ ) es igual a cero'.

Observamos que para aplicar correctamente estas leyes es necesario establecer una convención:

- Cuando, al recorrer la trayectoria, nos movemos en el sentido de la corriente, la caída de potencial ( $RI$ ) tiene signo (-).
- Si al pasar por una fuente de 'fem' nos movemos del terminal (-) al terminal (+), la 'fem' en cuestión se toma con signo (+).

### Balance de Energía y Ley de Joule

Supongamos que en el intervalo de tiempo  $dt$  se transporta una carga  $dq$  ( $dq = I dt$ ) entre el punto  $a$  y el punto  $b$  de un circuito. Al pasar de  $a$  a  $b$ , la energía de los portadores de carga  $dq$  experimenta un cambio  $dU_{ab}$ , dado por

- $dU_{ab} = (V_b - V_a)dq,$

pero

$$V_b - V_a = \epsilon_{ab} - R_{ab}I.$$

entonces

$$dU_{ab} = (\epsilon_{ab}I - R_{ab}I^2)dt.$$

La interpretación de esta ecuación es la siguiente,  $\epsilon_{ab}I dt$  es la energía entregada por la fuente,  $R_{ab}I^2 dt$  es la energía disipada en la resistencia. En un circuito cerrado,  $a=b$ , y  $V_a=V_b$ ,

$$\epsilon_{ab}I = R_{ab}I^2$$

luego ; en otras palabras, la potencia entregada por la batería es igual a la potencia disipada.

La energía que 'se va' del sistema se disipa en forma de calor. Esto constituye el llamado **efecto joule**. La presencia de un elemento resistivo va siempre acompañada de calentamiento en el circuito (esto es, a veces, deseable - calefactores eléctricos, etc.- y otras veces indeseable - parte de la energía disponible 'se malgasta').

## 2. Ecuaciones de Maxwell y Propagación de Ondas Electromagnéticas

### 2.1 Corriente de desplazamiento.

La **corriente de desplazamiento** es un tipo de corriente postulada en 1865 por James Clerk Maxwell cuando formulaba lo que ahora se hacen llamar las ecuaciones de Maxwell. Matemáticamente se define como el flujo del campo eléctrico a través de la superficie:

$$I_D = \varepsilon \frac{d\Phi_E}{dt}$$

Está incorporada en la ley de Ampere, cuya forma original funcionaba sólo en superficies que estaban bien definidas (continuas y existentes) en términos de corriente. Una superficie  $S_1$  elegida tal que incluya únicamente una placa de un condensador debería tener la misma corriente que la de una superficie  $S_2$  elegida tal que incluya ambas placas del condensador. Sin embargo, como la carga termina en la primera placa, la Ley de Ampere concluye que no existe carga encerrada en  $S_1$ . Para compensar esta diferencia, Maxwell razonó que esta carga se encontraba en el flujo eléctrico, la carga en el campo eléctrico, y mientras que la corriente de desplazamiento no es una corriente de carga eléctrica, produce el mismo resultado que generando un campo magnético.

Pese a que hay gente que afirma que la corriente de desplazamiento no existe realmente, se puede pensar en ella como la respuesta de un material dieléctrico a un campo eléctrico variante. La corriente de desplazamiento es la única corriente que atraviesa un dieléctrico perfecto.

La densidad de corriente se puede hallar suponiendo  $\Phi_E = EA$  y utilizando  $J_D = I_D / A$ , llegando a:

$$\vec{J}_D = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

### 2.2 Forma integral y Diferencial de las Ecuaciones de Maxwell y aplicaciones.

#### Ecuaciones de Maxwell

Hemos establecido previamente las ecuaciones del Campo Electromagnético, en las condiciones más generales posibles. Este conjunto de ecuaciones, denominado Ecuaciones de Maxwell, describe todos los fenómenos electromagnéticos, a nivel macroscópico.

Las relaciones generales entre los campos macroscópicos son

Para poder resolver las ecuaciones, se debe conocer las relaciones constitutivas, entre  $\vec{M}$  y  $\vec{H}$ , entre  $\vec{P}$  y  $\vec{E}$ , y entre  $\vec{J}$  y  $\vec{E}$ .

Las ecuaciones de Maxwell en el vacío ( $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ ,  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$ ,  $\vec{J} = 0$ ,  $\rho = 0$ ) son:

Estas ecuaciones implican la existencia de 'ondas electromagnéticas', que se propagan

en el vacío con velocidad  $c = (\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2}$ . Por el momento, tomemos  $c$  como una definición (es fácil ver que tiene las dimensiones de una velocidad), y tratemos de obtener una ecuación que involucre solamente a  $\vec{E}$ . Para hacer esto último, tomemos el rotor de la 'ecuación de Faraday',

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) = -\vec{\nabla} \wedge \left( \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \right), \quad (54)$$

lo cual da,

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} \quad (55)$$

Finalmente, se tiene

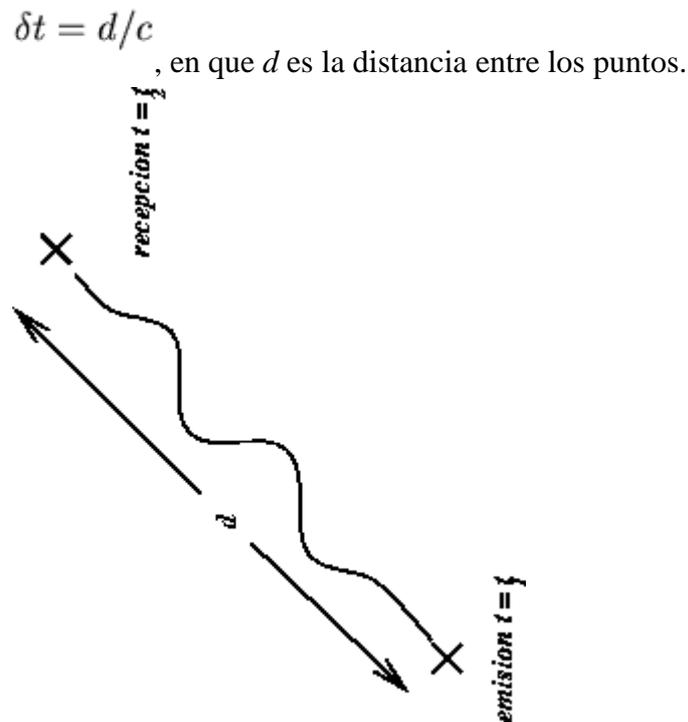
$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} = 0. \quad (56)$$

Esta es la llamada ecuación de ondas para el campo eléctrico. El campo magnético  $\vec{B}$  satisface la misma ecuación de ondas.

$$\nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{B} = 0. \quad (57)$$

El valor de  $c \approx 299.000$ (km/s), representa la velocidad de propagación de los frentes de onda (en realidad es la 'velocidad de fase').

Hay varias preguntas que uno se puede hacer, y que responderemos a continuación. En primer lugar, ¿Cómo se produce una onda electromagnética? La respuesta más simple es que basta tener cargas en movimiento acelerado, o corrientes que varían en el tiempo.



**Figure 9.1:** El punto de emisión y recepción de una onda están separados por un tiempo

Para dar una descripción matemática del proceso de emisión de una onda electromagnética,

deberemos obtener los campos eléctrico y magnético, o bien los potenciales dinámicos,

$$\vec{A}(\vec{r}, t) \quad \vec{\Phi}(\vec{r}, t)$$

y . Observamos, en forma muy simple, que los potenciales anteriores satisfacen las ecuaciones de onda siguientes:

Recordamos que el potencial estático  $\vec{A}(\vec{r})$  satisface

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}', t') d^3r'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (58)$$

Como éste potencial satisface una ecuación diferencial similar a la ecuación de ondas, suponemos que la forma del potencial es también similar. Hay una importante diferencia, la que ilustramos en la figura, pues cuando se detecta una onda en el punto  $\vec{r}$ , en el instante  $t$ , ésta fue emitida en el instante anterior  $t'$ , en un punto  $\vec{r}'$ , tal que  $t-t' = d/c$ , en que  $d$  es la distancia entre los puntos de emisión y recepción. Se dice entonces que el potencial es retardado. De esta forma, escribimos

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}', t') d^3r'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (59)$$

Donde:

$$t - t' = |\vec{r} - \vec{r}'|/c$$

Hemos visto que, en las zonas sin cargas ni corrientes, las ecuaciones de Maxwell conducen a las ecuaciones de ondas para los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$ . En las zonas en que existen cargas y corrientes, es mejor buscar las ecuaciones para los potenciales.

Tomemos primero el potencial magnético  $\vec{A}$ , y reemplazamos en la ley de Faraday, obteniendo

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \Rightarrow \vec{\nabla} \wedge \left( \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} \right) = 0 \quad (60)$$

Deducimos entonces que

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \Phi - \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}. \quad (61)$$

Tomamos ahora la ecuación para el campo  $\vec{H}$ , y obtenemos

$$\frac{\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}}{\mu} = \vec{J} - \epsilon \left( \vec{\nabla} \frac{\partial}{\partial t} \Phi + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A} \right). \quad (62)$$

Tenemos entonces la siguiente ecuación para el potencial  $\vec{A}$ ,

$$\left( \nabla^2 - \epsilon \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{A} = -\mu \vec{J} + \vec{\nabla} \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \epsilon \mu \frac{\partial}{\partial t} \Phi \right). \quad (63)$$

Se impone usualmente la llamada condición de Lorentz, que establece que la cantidad entre paréntesis en el lado derecho de la ecuación anterior se anula idénticamente,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \epsilon \mu \frac{\partial}{\partial t} \Phi = 0. \quad (64)$$

Con esto, el potencial  $\vec{A}$ , satisface la ecuación de ondas clásica, con fuentes, que escribimos anteriormente. Reemplazando en la ley de Gauss, se obtiene también la ecuación de ondas para el potencial  $\Phi$ . Hay que hacer notar que, como se dijo ya en magnetostática, existe una ambigüedad en la definición del potencial  $\vec{A}$ , que permite imponer una condición de 'gauge' como la condición de Lorentz.

Las **ecuaciones de Maxwell** son las ecuaciones que describen los [fenómenos electromagnéticos](#). La gran contribución de [James Clerk Maxwell](#) fue reunir en estas ecuaciones largos años de resultados experimentales, debidos a [Coulomb](#), [Gauss](#), [Ampere](#), [Faraday](#) y otros, introduciendo los conceptos de campo y corriente de

desplazamiento, y unificando los campos eléctricos y magnéticos en un solo concepto: el **campo electromagnético**. De las ecuaciones de Maxwell se desprende la existencia de ondas electromagnéticas propagándose con velocidad  $v_f$ :

$$v_f = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$$

El valor numérico de esta cantidad, que depende del medio material, coincide con el valor de la velocidad de la **luz** en dicho medio, con lo cual Maxwell identificó la luz con una onda electromagnética, unificando la **óptica** con el electromagnetismo.

## Resumen de las ecuaciones

### Caso general

Nombre	Forma diferencial	Forma integral
Ley de Gauss:	$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$	$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{A} = \int_V \rho dV$
Ley de Gauss para el campo magnético (ausencia de monopolos magnéticos):	$\nabla \cdot \vec{B} = 0$	$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$
Ley de Faraday:	$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A}$
Ley de Ampère generalizada:	$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$	$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{A} + \frac{d}{dt} \int_S \vec{D} \cdot d\vec{A}$

donde la siguiente tabla proporciona el significado de cada símbolo y su unidad de medida en el **SI**:

Símbolo	Significado	Unidad de medida SI
$\vec{E}$	campo eléctrico	volt por metro
$\vec{H}$	campo magnético	ampere por metro

$\vec{D}$	densidad de campo eléctrico	coulomb por metro cuadrado
$\vec{B}$	densidad de campo magnético	tesla, o equivalentemente, weber por metro cuadrado
$\rho$	densidad de carga eléctrica	coulomb por metro cúbico
$\vec{J}$	densidad de corriente	ampere por metro cuadrado
$d\vec{A}$	vector del elemento diferencial de superficie normal a la superficie S	metros cuadrados
$dV$	elemento diferencial de volumen encerrado por la superficie S	metros cúbicos
$d\vec{l}$	vector del elemento de longitud del contorno que limita la superficie S	metros
$\nabla \cdot$	divergencia	por metro
$\nabla \times$	rotacional	por metro

### 2.3 Ondas Electromagnéticas Planas en medios con y sin pérdidas.

La ecuación de ondas tiene soluciones de la forma de 'ondas que se desplazan sin cambiar de forma'. Consideremos primero el caso unidimensional, para una función  $u(x,t)$ ,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}u = 0. \quad (71)$$

La solución general de esta ecuación es de la forma

$$u(x,t) = f(x - ct) + g(x + ct), \quad (72)$$

en que  $f(x)$  y  $g(x)$  son funciones arbitrarias -por el momento- de  $x$  y  $t$ , y se relacionan con las condiciones iniciales y de borde del problema.

El caso tridimensional es mucho más rico en soluciones, por lo cual sólo estudiaremos algunas de las más importantes. Si consideramos una onda que se mueve en la dirección de  $\hat{n}$ ,

$$\xi = \vec{r} \cdot \hat{n}$$

$$\nabla^2 u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u = 0. \quad (73)$$

Es fácil verificar que existen soluciones de la forma

$$\phi(\vec{r}, t) = f(\xi - ct) + g(\xi + ct), \quad (74)$$

llamadas 'ondas planas', pues ((a  $t = cte.$ ) el argumento permanece constante para todos los puntos del plano  $\xi = \vec{r} \cdot \hat{n} = cte.$  perpendicular a  $\hat{n}$ . En el caso de los vectores de campo  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ , las ondas planas son de la forma

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 f(\vec{r} \cdot \hat{n} \pm ct). \quad (75)$$

Una onda plana sinusoidal, se escribe en la forma exponencial

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}, \quad (76)$$

en que  $\phi = \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t$  es la 'fase' de la onda. Si comparamos la fase  $\phi$  con la forma anterior de la onda plana, vemos que se debe satisfacer

$$\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t = k(\hat{n} \cdot \vec{r} - \frac{\omega}{k} t), \quad (77)$$

lo que implica las relaciones

$$\omega = 2\pi/T = 2\pi\nu$$

- La frecuencia angular  $\omega = 2\pi\nu$ , en que  $T$  es el período y  $\nu$  la frecuencia.
- El vector de onda  $\vec{k} = k\hat{n}$ , es inversamente proporcional a la longitud de onda  $\lambda = 2\pi/k$

$$v_\phi = \omega/k = \lambda\nu$$

- La velocidad (de fase) de la onda,

$$(\xi = \hat{n} \cdot \vec{r})$$

Se puede escribir, en forma equivalente,

$$\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t = k(\xi - ct) = 2\pi\left(\frac{\xi}{\lambda} - \nu t\right) = etc. \quad (78)$$

En forma alternativa a las exponenciales, se puede tratar todo íntegramente con funciones reales, combinaciones de senos y cósenos. El tratamiento es completamente equivalente, pero los cálculos son, generalmente, bastante mas engorrosos, por lo cual nosotros preferiremos la representación compleja (llamada también representación 'fasorial'). De esta forma, escribiremos los campos complejos

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad \text{y} \quad \vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}. \quad (79)$$

Veremos que los vectores  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  y  $\vec{k}$  no son cualesquiera, sino que están relacionados como se observa en la figura; esto es, forman un trío ortogonal. En efecto; en un medio

lineal (con  $\rho = 0, \vec{J} = 0$ )

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow i\vec{k} \cdot \vec{B}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = 0 \Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{B}_0 = 0 \quad (80)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow i\vec{k} \cdot \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = 0 \Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0. \quad (81)$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{\nabla} \wedge \vec{E} &= i\vec{k} \wedge \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \\ -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} &= i\omega \vec{B}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \omega \vec{B}_0 = \vec{k} \wedge \vec{E}_0$$

Por esta razón se dice que las ondas electromagnéticas son 'transversales'; esto es  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  son  $\perp$  a la dirección de propagación  $(\vec{k})$

$$\vec{B}_0 = \left(\frac{k}{\omega}\right) \hat{n} \wedge \vec{E} = \frac{1}{v} \hat{n} \wedge \vec{E}. \quad (82)$$

La velocidad de propagación  $v = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$ , reservamos  $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$  para la velocidad de la luz en el vacío. Definimos el índice de refracción',  $n$ , como el cuociente entre la velocidad de la luz en el vacío y la velocidad de la luz en el medio material,

$$n := \frac{c}{v} = \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0}} \approx \sqrt{\epsilon/\epsilon_0}. \quad (83)$$

La última relación se sigue del hecho que, para todos los materiales no ferromagnéticos se tiene  $\mu \approx \mu_0$ . Además, se tiene que  $n \geq 1$ .

## Ondas Planas en Medios Conductores

Consideramos brevemente el problema de propagación de una onda en un medio conductor homogéneo. Las ecuaciones de Maxwell,

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \wedge \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0, \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{H} &= \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} & \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \rho.\end{aligned}$$

deben usarse en conjunto con las relaciones 'constitutivas', de un conductor  $\vec{J} = g\vec{E}$ ,  $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$ , y  $\vec{B} = \mu\vec{H}$ .

Tomemos una onda monocromática, de la forma  $\vec{E} = \vec{E}(r)e^{i\omega t}$ , etc. Entonces la parte espacial de la onda satisface las relaciones

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu(g + i\omega\epsilon)\vec{E} \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -i\omega\vec{B} \end{cases}$$

Una onda que se mueve en la dirección  $z$ , satisface

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) = -\nabla^2 \vec{E} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = -g\mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad (93)$$

$$\vec{E} = E(z)\hat{i}$$

que se reduce a la expresión mas simple (tomando )

$$\frac{d^2}{dz^2} E + (\omega^2 \epsilon \mu + i\omega g \mu) E = 0. \quad (94)$$

Podemos escribir entonces

$$E = e^{i(\omega t - \gamma z)} \quad \text{con} \quad \gamma^2 = \omega^2 \epsilon \mu + i\omega g \mu. \quad (95)$$

$$\gamma^2 = |\gamma^2| e^{i\delta} \begin{cases} |\gamma^2| = [(\epsilon\mu\omega^2)^2 + (\omega g\mu)^2]^{1/2} \\ tg\delta = \omega g\mu / (\omega^2 \epsilon \mu) = g / (\omega\epsilon) \end{cases}$$

También se puede separar las partes real e imaginaria de  $\gamma$ ,

De esta manera,  $E$  se puede escribir como una onda sinusoidal, que viaja y se atenúa exponencialmente en la dirección  $z$ ,

$$E = E_0 e^{i(\omega t - \alpha z)} e^{-\beta z}. \quad (96)$$

A frecuencias bajas,  $\omega \ll g$ , se puede aproximar la fase a  $\pi/2$ , pues

$$tg\delta \rightarrow +\infty \Rightarrow \delta \rightarrow \pi/2; \quad (97)$$

lo cual significa que  $\gamma$  es imaginario puro. La parte imaginaria es entonces

$$\beta \approx \sqrt{\omega g \mu / 2} = \frac{1}{d}. \quad (98)$$

La cantidad  $d$  se llama 'espesor de piel'. Para  $\nu = 10^{10} Hz$ , por ejemplo, se tiene  $d = 10^{-5}$  (cm).

## 2.4 Potencia y Vector Poynting.

### Vector de Poynting y densidad de energía

El vector de Poynting de una onda plana en el vacío es:

$$\mathbf{N}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \left( \pm \frac{\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\eta_0} \right) = \pm \frac{E^2(\mathbf{r}, t)}{\eta_0} \hat{\mathbf{z}} \Rightarrow \mathbf{N}(\mathbf{r}, t) = \pm \frac{E^2(\mathbf{r}, t)}{\eta_0} \hat{\mathbf{z}}$$

donde el signo (+) vale para la onda progresiva y el signo (-) para la onda regresiva. Este resultado es válido cualquiera sea la forma de onda de la onda plana.

La densidad de energía de una onda plana en el vacío puede escribirse:

$$\begin{aligned} u(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{2} [\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)] = \frac{1}{2} [\epsilon_0 E^2(\mathbf{r}, t) + \mu_0 H^2(\mathbf{r}, t)] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \epsilon_0 E^2(\mathbf{r}, t) + \mu_0 \frac{E^2(\mathbf{r}, t)}{\eta_0^2} \right] = \frac{1}{2} [\epsilon_0 E^2(\mathbf{r}, t) + \epsilon_0 E^2(\mathbf{r}, t)] = \epsilon_0 E^2(\mathbf{r}, t) \end{aligned}$$

y finalmente:

$$u(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 E^2(\mathbf{r}, t)$$

Se observa que la contribución del campo eléctrico y la contribución del campo magnético son iguales. La energía está "equipartida" entre ambos campos. Además, podemos ver que:

$$\frac{\mathbf{N}(\mathbf{r}, t)}{u(\mathbf{r}, t)} = \pm \frac{\hat{\mathbf{z}}}{\eta_0 \epsilon_0} = \pm c \hat{\mathbf{z}}$$

Esta es la llamada **velocidad de la energía**, que describe la velocidad con que el frente de onda (el plano frontera entre la región donde hay campo y la región donde no hay campo) transporta la energía.

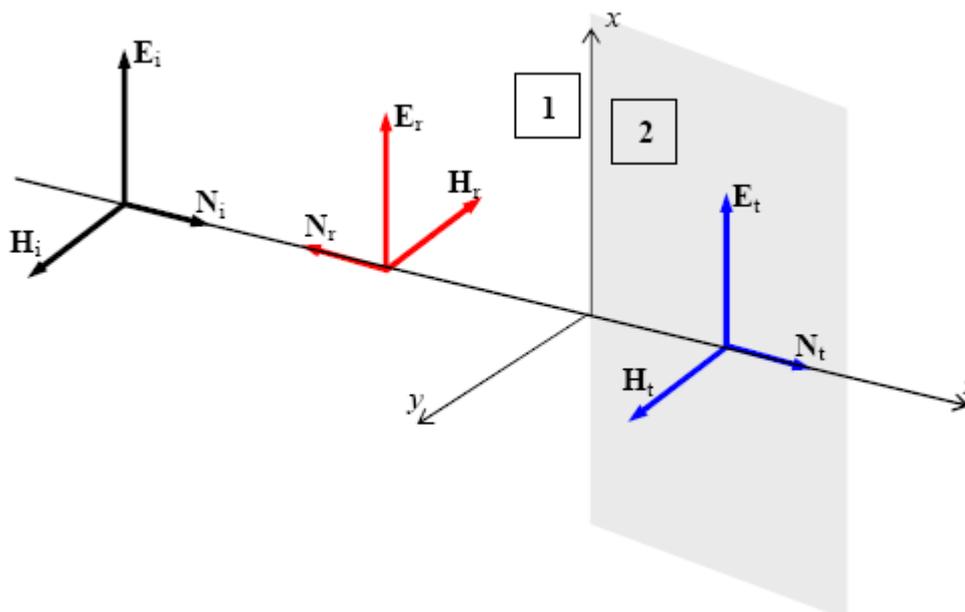
## 2.5 Reflexión de Ondas en incidencia normal y oblicua.

En esta parte veremos la propagación de ondas electromagnéticas en presencia de interfaces entre medios de características diferentes. Cuando las ondas inciden normalmente sobre la interfase se producen reflexiones cuya descripción es equivalente a la de la propagación de ondas en líneas de transmisión. Numerosas aplicaciones en blindajes surgen de esta teoría. En la incidencia oblicua se hallan las leyes de Snell de la óptica. Finalmente veremos brevemente la teoría de la difracción de ondas al propagarse cerca de obstáculos.

### Incidencia normal sobre una interfase

Hemos visto la propagación de ondas en medios ilimitados. En las siguientes secciones veremos el comportamiento de los campos cuando ondas electromagnéticas inciden sobre una superficie interfase que separa dos medios de propiedades (simbolizadas por su impedancia intrínseca) diferentes. Por simplicidad matemática usaremos ondas planas e interfaces planas.

Consideremos una onda plana monocromática linealmente polarizada que incide **normalmente** desde un medio (1) sobre un plano interfase que lo separa de un medio (2).



En la incidencia normal la dirección de propagación es **perpendicular al plano interfase**. Suponemos que el **medio de incidencia** (1) no tiene pérdidas ( $k_1$  y  $\eta_1$  reales). El **medio de transmisión** (2) tendrá en general parámetros complejos  $\gamma_2$  y  $\eta_2$ . Planteamos las ecuaciones de los campos en las dos regiones:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \Rightarrow \quad \begin{aligned} \mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) &= E_{0+} \hat{\mathbf{x}} e^{i(\omega t - k_1 z)} + E_{0-} \hat{\mathbf{x}} e^{i(\omega' t + k_1' z)} \\ \mathbf{H}_1(\mathbf{r}, t) &= \frac{E_{0+}}{\eta_1} \hat{\mathbf{y}} e^{i(\omega t - k_1 z)} - \frac{E_{0-}}{\eta_1} \hat{\mathbf{y}} e^{i(\omega' t + k_1' z)} \end{aligned} \quad k_1' = k_1(\omega') \\
 (2) \quad & \Rightarrow \quad \begin{aligned} \mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t) &= E_{0t} \hat{\mathbf{x}} e^{i(\omega'' t - \gamma_2 z)} \\ \mathbf{H}_2(\mathbf{r}, t) &= \frac{E_{0t}}{\eta_2} \hat{\mathbf{y}} e^{i(\omega'' t - \gamma_2 z)} \end{aligned} \quad \gamma_2'' = \gamma_2(\omega'')
 \end{aligned}$$

En la región de incidencia, debe haber en general una **onda incidente** y una **onda reflejada**, debido a la presencia de la interfase que implica una discontinuidad en el medio donde ocurre la propagación. En la región de transmisión, supuesto semi-infinito, sólo hay una **onda transmitida**. Las frecuencias de estas tres ondas son en general diferentes.

Los campos deben cumplir las condiciones de frontera en la interfase  $z = 0$ . Como ambos campos son tangenciales a la superficie de separación, se conservan:

$$\begin{aligned}
 E_1(z=0, t) = E_2(z=0, t) & \Rightarrow E_{0+} e^{i\omega t} + E_{0-} e^{i\omega' t} = E_{0t} e^{i\omega'' t} \\
 H_1(z=0, t) = H_2(z=0, t) & \Rightarrow \frac{E_{0+}}{\eta_1} e^{i\omega t} - \frac{E_{0-}}{\eta_1} e^{i\omega' t} = \frac{E_{0t}}{\eta_2} e^{i\omega'' t}
 \end{aligned}$$

Estas ecuaciones se deben cumplir para todo  $t$ . Como las funciones exponenciales complejas son ortogonales para distintos valores de  $\omega$ , debe ser  $\omega = \omega' = \omega''$ . Queda así:

$$\boxed{\rho = \frac{E_{0-}}{E_{0+}} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}} \quad \boxed{\tau = \frac{E_{0t}}{E_{0+}} = 1 + \rho = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1}}$$

donde hemos definido los **coeficientes de reflexión** y **transmisión**  $\rho$  y  $\tau$ . Desde el punto de vista del transporte de energía, podemos calcular el **flujo medio de potencia por unidad de área** que transportan las ondas involucradas:

$$\begin{aligned}
 \langle P_i \rangle &= \frac{1}{2} \text{Re}(E_i H_i^*) = \frac{E_{0+}^2}{2\eta_1} \quad (\eta_1 \text{ real}) \\
 \langle P_r \rangle &= \frac{1}{2} \text{Re}(E_r H_r^*) = |\rho|^2 \frac{E_{0+}^2}{2\eta_1} = |\rho|^2 \langle P_i \rangle \Rightarrow R = \frac{\langle P_r \rangle}{\langle P_i \rangle} = |\rho|^2 \\
 \langle P_t \rangle &= \frac{1}{2} \text{Re}(E_t H_t^*) = |\tau|^2 \frac{\eta_1 \eta_2'}{|\eta_2|^2} \langle P_i \rangle \Rightarrow T = \frac{\langle P_t \rangle}{\langle P_i \rangle} = \frac{\eta_1 \eta_2'}{|\eta_2|^2} |\tau|^2
 \end{aligned}$$

donde  $R$  y  $T$  son los **coeficientes de reflexión** y **transmisión de potencia**.

Para una onda plana que se propaga en un medio infinito, la relación entre el campo eléctrico y el magnético es  $\pm\eta$ , donde  $\eta$  es la impedancia intrínseca de ese medio y el signo superior corresponde a la onda progresiva y el inferior a la regresiva. Esto ocurre para los campos transmitidos, que forman una onda progresiva, pero no para los campos en el medio de incidencia. En este último caso podemos definir la **impedancia de campo** o **impedancia de onda**:

$$Z(z) = \frac{E_1}{H_1} = \frac{E_{0+} e^{-ikz} + E_{0-} e^{ikz}}{\frac{E_{0+}}{\eta_1} e^{-ikz} - \frac{E_{0-}}{\eta_1} e^{ikz}} \Rightarrow Z(z) = \eta_1 \frac{e^{-ikz} + \rho e^{ikz}}{e^{-ikz} - \rho e^{ikz}}$$

que depende de la posición.

De las ecuaciones para la incidencia normal se observa que hay una gran semejanza con las ecuaciones para las líneas de transmisión:

	<b>Líneas de transmisión</b>	<b>Incidencia normal</b>
Característica del medio	<i>Impedancia característica:</i> $Z_0$	<i>Impedancia intrínseca:</i> $\eta$
Magnitud física	<i>tensión:</i> $v(z,t)$ <i>corriente:</i> $i(z,t)$	<i>campo eléctrico:</i> $E(z,t)$ <i>campo magnético:</i> $H(z,t)$
Coefficiente de reflexión	$\rho = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$	$\rho = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$
Coefficiente de transmisión	$\tau = \frac{2Z_L}{Z_L + Z_0} = 1 + \rho$	$\tau = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} = 1 + \rho$
Reflexión de potencia	$R =  \rho ^2$	$R =  \rho ^2$
Transmisión de potencia	$T = 1 - R$	$T = 1 - R$
Impedancia de campo	$Z(z) = Z_0 \frac{e^{-ikz} + \rho e^{ikz}}{e^{-ikz} - \rho e^{ikz}}$	$Z(z) = \eta_1 \frac{e^{-ikz} + \rho e^{ikz}}{e^{-ikz} - \rho e^{ikz}}$
Relación de onda estacionaria	$ROE = \frac{1 +  \rho }{1 -  \rho }$	$ROE = \frac{1 +  \rho }{1 -  \rho }$

### **Incidencia sobre un dieléctrico sin pérdidas**

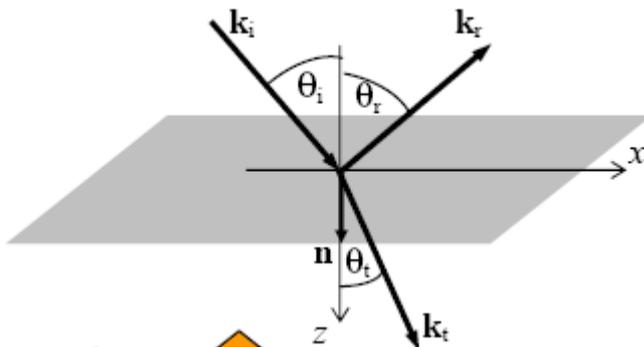
**En este caso  $\eta_2$  es real y entonces  $\rho$  es real.**

El campo reflejado se hallará en fase con el campo incidente en  $z = 0$  si  $\eta_2 > \eta_1$  y en contrafase si  $\eta_2 < \eta_1$ . Sólo si las impedancias intrínsecas de ambos medios coinciden no habrá reflexión. En general, esto ocurrirá cuando se trate de un único medio (no existe interfase) si ambos medios son dieléctricos, ya que serán medios paramagnéticos y las permeabilidades habitualmente serán cercanas a la del vacío. Sin embargo, como veremos más abajo, actualmente se usan materiales de ferrita cerámica con impedancia característica similar a la del aire.

## Incidencia oblicua

Cuando el vector de propagación  $\mathbf{k}$  de una onda electromagnética incidente no es normal a la interfase plana entre dos medios de impedancia intrínseca diferentes hablamos de incidencia oblicua.

El plano formado por la normal  $\mathbf{n}$  a la interfase y el vector de incidencia  $\mathbf{k}_i$  es el **plano de incidencia** ( $xz$ ). El **ángulo de incidencia** es  $\theta_i$ . Debido a la desadaptación de impedancias entre ambos medios habrá generalmente una onda **reflejada**, definida por su **ángulo de reflexión**  $\theta_r$  y el vector  $\mathbf{k}_r$  y una onda transmitida (o **refractada**, en la jerga de la óptica), definida por el **ángulo de refracción**  $\theta_t$  y el vector  $\mathbf{k}_t$  (supuesto real en esta sección).



Desde el punto de vista de la potencia que propagan las ondas, se ve que hay una potencia transmitida  $P_t$  en el medio de transmisión, mientras que en el medio de incidencia hay potencia que se propaga en dirección **paralela** a la interfase y potencia que se propaga en dirección **normal** a la interfase. Las componentes de los campos **normales al plano de incidencia** son **transversales** a las direcciones de propagación de potencia.

Es matemáticamente conveniente y ventajoso desde el punto de vista de las analogías conceptuales entre la incidencia de ondas sobre interfases y la propagación de ondas en líneas de transmisión definir la llamada **impedancia de onda**, como la relación entre las componentes de los campos **paralelas a la interfase**:

$$Z = \frac{|E_t|}{|H_t|} = \frac{|\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}|}{|\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}|}$$

La onda plana incidente tendrá sus campos polarizados en un plano perpendicular a  $\mathbf{k}_i$ . Suponemos por simplicidad ondas linealmente polarizadas. En tal caso, cualquier dirección de polarización de los campos se puede resolver en dos componentes: una con **E contenido en el plano de incidencia** y otra con **E normal al plano de incidencia**. Las condiciones de borde de los campos sobre la interfase son diferentes para estos dos casos, por lo que vamos a estudiarlos por separado.

Los campos resultantes se pueden superponer en un caso de polarización lineal cualquiera. Para cualquier dirección de polarización de la onda incidente podemos escribir que:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_i(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}_i e^{i(\omega t - \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r})} & \mathbf{H}_i(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mathbf{k}_i \times \mathbf{E}_i(\mathbf{r}, t)}{\omega \mu_i} \\ \mathbf{E}_r(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}_r e^{i(\omega' t - \mathbf{k}'_r \cdot \mathbf{r})} & \mathbf{H}_r(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mathbf{k}'_r \times \mathbf{E}_r(\mathbf{r}, t)}{\omega' \mu_i} \\ \mathbf{E}_t(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}_t e^{i(\omega'' t - \mathbf{k}''_t \cdot \mathbf{r})} & \mathbf{H}_t(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mathbf{k}''_t \times \mathbf{E}_t(\mathbf{r}, t)}{\omega'' \mu_i} \end{aligned}$$

Donde

$$\mathbf{k}'_r = \mathbf{k}_r(\omega') \quad , \quad \mathbf{k}''_t = \mathbf{k}_t(\omega'')$$

Estos campos deben satisfacer las condiciones de frontera sobre la interfase  $z = 0$  :

$$(\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r - \mathbf{E}_t) \times \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad (\mathbf{H}_i + \mathbf{H}_r - \mathbf{H}_t) \times \hat{\mathbf{n}} = 0$$

que es la expresión matemática de conservación de la componentes tangenciales. Estas ecuaciones de conservación implican que la fase de las ondas debe ser la misma sobre el plano interfase por la ortogonalidad de las exponenciales complejas. Nuevamente, como en el caso de la incidencia normal, la frecuencia de las ondas debe ser la misma:

$$(\omega = \omega' = \omega'') \Rightarrow \mathbf{k}'_r = \mathbf{k}_r = \mathbf{k}_r(\omega) \quad , \quad \mathbf{k}''_t = \mathbf{k}_t = \mathbf{k}_t(\omega)$$

para que estas condiciones se cumplan para **todo instante de tiempo**, y además:

$$k_{i_x} x = k_{r_x} x = k_{t_x} x \quad \Rightarrow \quad k_{i_x} = k_{r_x} = k_{t_x}$$

para que se cumpla para **todo punto** ( $x, z = 0$ ) sobre la interfase. Entonces las componentes tangenciales de los vectores de onda deben ser iguales y tenemos:

$$k_{i_x} = k_{r_x} \quad \Rightarrow \quad k_i \sin \theta_i = k_r \sin \theta_r \quad \Rightarrow \quad \sin \theta_i = \sin \theta_r \quad \Rightarrow \quad \theta_i = \theta_r$$

$$k_{i_x} = k_{t_x} \quad \Rightarrow \quad k_i \sin \theta_i = k_t \sin \theta_t \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} = \frac{k_t}{k_i} = \frac{\mu_2 \eta_1}{\mu_1 \eta_2}$$

Estas relaciones entre los ángulos de las direcciones de propagación y la normal a la interfase se conocen como **leyes de Snell** de la óptica geométrica. Si ambos medios son dieléctricos

$$(\mu_1 = \mu_2 \approx \mu_0):$$

$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} = \frac{\mu_2 \eta_1}{\mu_1 \eta_2} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} = \frac{n_2}{n_1}$$

donde  $n_1$  y  $n_2$  son los **índices de refracción** de los medios.

**Las leyes de Snell son válidas independientemente de la polarización de la onda incidente.**

Se observa que en la incidencia desde un medio ópticamente menos **denso** a otro más denso ( $n_2 > n_1$ ) el ángulo de refracción es menor que el ángulo de incidencia, es decir, la dirección de propagación se acerca a la normal, mientras que lo opuesto ocurre en el caso contrario ( $n_2 < n_1$ ).

# CAPITULO 3. LÍNEAS DE TRANSMISIÓN

## 3.1 Introducción. Parámetros de las líneas de transmisión.

En muchas maneras la teoría de la Línea de Transmisión salva las diferencias entre el análisis del campo y la teoría básica de circuitos, y es de importancia significativa en el análisis de redes de microondas. Como veremos, el fenómeno de propagación de onda en líneas de transmisión puede aproximarse a partir de una extensión de la teoría de circuitos, o de una especialización de las ecuaciones de Maxwell. Presentamos ambos puntos de vista, y mostramos como esta propagación de onda está descrita por ecuaciones muy similares a aquellas usadas en el capítulo dos para propagación de ondas planas.

### EL MODELO DE CIRCUITO DE ELEMENTOS CONCENTRADOS PARA UNA LINEA DE TRANSMISION

La diferencia clave entre la teoría de circuitos y la teoría de la línea de transmisión es el tamaño eléctrico. El análisis de circuitos asume que las dimensiones físicas de una red son mucho más pequeñas que la longitud de onda eléctrica, mientras que las líneas de transmisión pueden ser una considerable fracción de una longitud de onda, o muchas longitudes de onda, en tamaño. Así una línea de transmisión es una red de parámetros distribuidos, donde los voltajes y corrientes pueden variar en magnitud y fase sobre su longitud.

Como se muestra en la figura 3.1 a, una línea de transmisión se presenta esquemáticamente a menudo como una línea de dos alambres, ya que las líneas de transmisión (para propagación de ondas TEM) siempre tienen por lo menos dos conductores. El pequeño trozo de línea de longitud  $\Delta z$  de la figura 3.1 a se puede modelar como un circuito de elementos concentrados, como se muestra en la figura 3.1 b, donde  $R$ ,  $L$ ,  $G$ ,  $C$  son cantidades por unidad de longitud definidas como sigue:

$R$  = resistencia en serie por unidad de longitud, para ambos conductores en  $\Omega/m$

$L$  = inductancia en serie por unidad de longitud, para ambos conductores en  $H/m$

$G$  = conductancia en paralelo por unidad de longitud, en  $S/m$

$C$  = capacitancia en paralelo por unidad de longitud, en  $F/m$

La inductancia en serie  $L$  representa la autoinductancia total de los dos conductores, mientras que la capacitancia  $C$  en paralelo se debe a la cercana

proximidad de los dos conductores. La resistencia en serie  $R$  representa la resistencia debida a la conductividad finita de los conductores, mientras que la conductancia en paralelo  $G$  se debe a las perdidas dieléctricas en el material entre los conductores.  $R$  y  $G$ , por lo tanto, representan pérdidas. Una línea de transmisión finita puede ser vista como secciones de cascada de la forma de la figura 3.1 b.

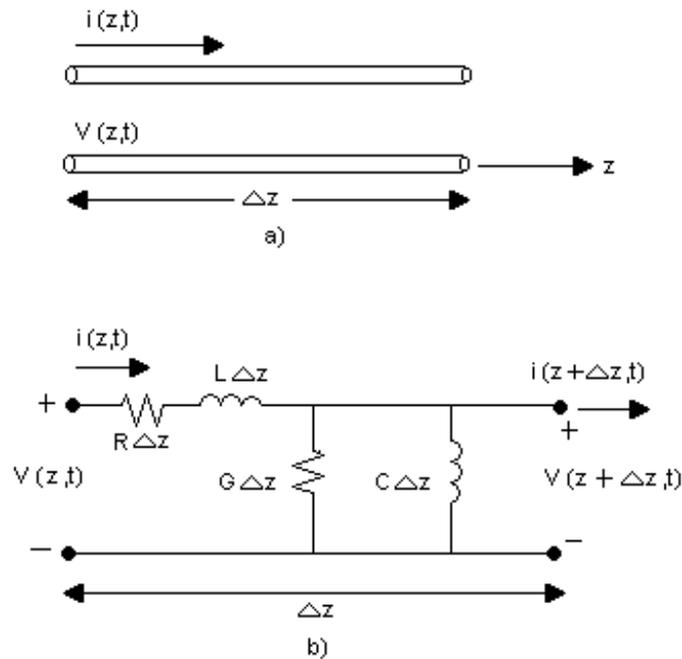


Figura 3.1 Definiciones de voltaje y corriente y circuito equivalente para una longitud incremental de una línea de transmisión. a) definiciones de voltaje y corriente. b) circuito equivalente de elementos concentrados

### 3.2 Ecuaciones de las líneas de transmisión.

En el circuito de la figura 3.1 b se puede aplicar la ley de voltajes de Kirchhoff para dar:

$$v(z,t) - R\Delta z i(z,t) - L\Delta z \frac{\partial i(z,t)}{\partial t} - v(z+\Delta z,t) = 0 \quad 3.1a$$

mientras que la ley de corrientes de Kirchhoff nos lleva a:

$$i(z,t) - G\Delta z v(z+\Delta z,t) - C\Delta z \frac{\partial v(z+\Delta z,t)}{\partial t} - i(z+\Delta z,t) = 0 \quad 3.1b$$

dividiendo 3.1 y 3.1b entre  $\Delta z$  y tomando el límite cuando  $\Delta z \rightarrow 0$  se obtienen las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} \frac{v(z,t)}{\Delta z} - Ri(z,t) - L \frac{\partial i(z,t)}{\partial t} - \frac{v(z+\Delta z,t)}{\Delta z} &= 0 \\ \frac{v(z+\Delta z,t) - v(z,t)}{\Delta z} &= -Ri(z,t) - L \frac{\partial i(z,t)}{\partial t} \\ \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{v(z+\Delta z,t) - v(z,t)}{\Delta z} &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left( -Ri(z,t) - L \frac{\partial i(z,t)}{\partial t} \right) \\ \frac{\partial v(z,t)}{\partial z} &= -Ri(z,t) - L \frac{\partial i(z,t)}{\partial t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{i(z,t)}{\Delta z} - Gv(z+\Delta z,t) - C \frac{\partial v(z+\Delta z,t)}{\partial t} - \frac{i(z+\Delta z,t)}{\Delta z} &= 0 \\ \frac{i(z+\Delta z,t) - i(z,t)}{\Delta z} &= -Gv(z+\Delta z,t) - C \frac{\partial v(z+\Delta z,t)}{\partial t} \\ \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{i(z+\Delta z,t) - i(z,t)}{\Delta z} &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left( -Gv(z+\Delta z,t) - C \frac{\partial v(z+\Delta z,t)}{\partial t} \right) \\ \frac{\partial i(z,t)}{\partial t} &= -Gv(z,t) - C \frac{\partial v(z,t)}{\partial t} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial v(z,t)}{\partial z} = -Ri(z,t) - L \frac{\partial i(z,t)}{\partial t} \quad 3.2a$$

$$\frac{\partial i(z,t)}{\partial t} = -Gv(z,t) - C \frac{\partial v(z,t)}{\partial t} \quad 3.2b$$

Estas ecuaciones son la forma en el dominio del tiempo de la línea de transmisión, o ecuaciones del telegrafista.

Para la ecuación de estado estable senoidal, con fasores basados en cosenos, 3.2 a y b se simplifica a:

$$\frac{dV(z)}{dz} = -(R + j\omega L)I(z) \quad 3.3a$$

$$\frac{dI(z)}{dz} = -(G + j\omega C)V(z) \quad 3.3b$$

### PROPAGACION DE ONDA EN UNA LINEA DE TRANSMISION

Las dos ecuaciones (3.3) se pueden resolver simultáneamente para dar ecuaciones de onda para  $V(z)$  e  $I(z)$ .

Derivando 3.3a con respecto a  $z$  y sustituyendo el valor de  $\frac{dI(z)}{dz}$  se tiene:

$$\frac{d^2V(z)}{dz^2} = -(R + j\omega L) \frac{dI(z)}{dz} = -(R + j\omega L)(-G + j\omega C)V(z) = (R + j\omega L)(G + j\omega C)V(z)$$

haciendo  $\gamma^2 = (R + j\omega L)(G + j\omega C) \Rightarrow \gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}$ , tenemos:

$$\frac{d^2V(z)}{dz^2} = \gamma^2 V(z)$$

Derivando 3.3b con respecto a  $z$  y sustituyendo el valor de  $\frac{dV(z)}{dz}$  se tiene:

$$\frac{d^2I(z)}{dz^2} = -(G + j\omega C) \frac{dV(z)}{dz} = -(G + j\omega C)(-R + j\omega L)V(z) = (R + j\omega L)(G + j\omega C)V(z)$$

haciendo  $\gamma^2 = (R + j\omega L)(G + j\omega C) \Rightarrow \gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}$ , tenemos:

$$\frac{d^2I(z)}{dz^2} = \gamma^2 I(z)$$

Considerando las ecuaciones resultantes:

$$\frac{d^2V(z)}{dz^2} = \gamma^2 V(z) \quad 3.4a$$

$$\frac{d^2I(z)}{dz^2} = \gamma^2 I(z) \quad 3.4b$$

donde

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} \quad 3.5$$

es la constante de propagación compleja, la cual es una función de la frecuencia. Las soluciones onda viajera para (3.4) se pueden encontrar como:

$$V(z) = V_0^+ e^{-\gamma z} + V_0^- e^{\gamma z} \quad 3.6a$$

$$I(z) = I_0^+ e^{-\gamma z} + I_0^- e^{\gamma z} \quad 3.6b$$

donde el termino  $e^{-\gamma z}$  representa propagación de onda en la dirección  $+z$ , y el termino  $e^{\gamma z}$  representa propagación de onda en la dirección  $-z$ . Aplicando (3.3 a) al voltaje de (3.6 a) da la corriente en la línea:

$$\begin{aligned}\frac{dV(z)}{dz} &= -(R + j\omega L)I(z) \\ \frac{d}{dz}(V_0^+ e^{-\gamma z} + V_0^- e^{\gamma z}) &= -(R + j\omega L)I(z) \\ -\gamma V_0^+ e^{-\gamma z} + \gamma V_0^- e^{\gamma z} &= -(R + j\omega L)I(z) \\ I(z) &= \frac{\gamma}{R + j\omega L}(V_0^+ e^{-\gamma z} + V_0^- e^{\gamma z})\end{aligned}$$

Comparando con (3.6 b) muestra que una impedancia característica,  $Z_0$ , se puede definir como:

$$Z_0 = \frac{R + j\omega L}{\gamma} = \frac{R + j\omega L}{\sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}} = \sqrt{\frac{(R + j\omega L)^2}{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}}$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \quad 3.7$$

Para relacionar el voltaje y la corriente en la línea como:

$$\frac{V_0^+}{I_0^+} = Z_0 = -\frac{V_0^-}{I_0^-}$$

Entonces (3.6 b) se puede reescribir en la siguiente forma:

$$I(z) = \frac{V_0^+}{Z_0} e^{-\gamma z} - \frac{V_0^-}{Z_0} e^{\gamma z}$$

Regresando al dominio del tiempo, la forma de onda del voltaje se puede expresar como:

$$v(z, t) = |V_0^+| \text{Cos}(\omega t - \beta z + \phi^+) e^{-\alpha z} + |V_0^-| \text{Cos}(\omega t + \beta z + \phi^-) e^{\alpha z} \quad 3.9$$

Donde  $\phi^\pm$  es el ángulo de fase del voltaje complejo  $V_0^\pm$  usando argumentos similares a aquellos de la solución de la ecuación de onda por el método de separación de variables, encontramos que la longitud de onda en la línea es:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \quad 3.10$$

y la velocidad de fase es:

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \lambda f \quad 3.11$$

### La línea sin pérdidas

La solución de arriba fue para una línea de transmisión general incluyendo los efectos de pérdidas, y se vio que la constante de propagación y la impedancia característica son complejas. En muchos casos prácticos, sin embargo, la pérdida de la línea es muy pequeña y se puede despreciar, resultando una simplificación de los resultados de arriba. Haciendo  $R=G=0$  en 3.5 da la constante de propagación como:

$$\gamma = \alpha + j\beta = j\omega\sqrt{LC}$$

o

$$\beta = \omega\sqrt{LC} \quad 3.12a$$

$$\alpha = 0 \quad 3.12b$$

Como esperábamos para el vaso sin pérdidas, la constante de atenuación  $\alpha$  es cero. La impedancia característica de (3.7) se reduce a

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad 3.13$$

la cual ahora es un número real, las soluciones generales para voltajes y corrientes en una línea de transmisión sin pérdidas pueden entonces escribirse como:

$$V(z) = V_0^+ e^{-j\beta z} + V_0^- e^{j\beta z} \quad 3.14a$$

$$I(z) = \frac{V_0^+}{Z_0} e^{-j\beta z} - \frac{V_0^-}{Z_0} e^{j\beta z} \quad 3.14b$$

La longitud de onda es:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{LC}} \quad 3.15$$

Y la velocidad de fase es:

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad 3.16$$

## ANÁLISIS DEL CAMPO DE LINEAS DE TRANSMISIÓN

En esta sección derivaremos la forma armónica temporal de las ecuaciones del telegrafista, iniciando con las ecuaciones de Maxwell. Empezaremos deduciendo los parámetros de la línea de transmisión (R,L,G,C) en términos de los campos eléctrico y magnético de la línea de transmisión y entonces deduciremos las ecuaciones del telegrafista usando estos parámetros para el caso específico de una línea coaxial.

### Parámetros de la línea de transmisión

Considere un metro de sección de una línea de transmisión uniforme con campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$ , como se muestran en la figura 3.2, donde  $\mathbf{S}$  es el área de la superficie seccional transversal de la línea. Siendo el voltaje entre los conductores  $V_0 e^{\pm j\beta z}$  y la corriente  $I_0 e^{\pm j\beta z}$ . La energía magnética almacenada promedio temporal para este metro de sección de línea se puede escribir como:

$$W_m = \frac{\mu}{4} \int_S \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^* ds,$$

mientras que la teoría de circuitos da  $w_m = \frac{L|I_0|^2}{4}$  en términos de la corriente en la línea. Podemos así identificar la inductancia propia por unidad de longitud como:

$$L = \frac{\mu}{|I_0|^2} \int_S \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^* ds \left( \frac{\text{H}}{\text{m}} \right) \quad 3.17$$

Similarmente, la energía eléctrica almacenada promedio temporal por unidad de longitud se puede encontrar mediante:

$$W_e = \frac{\epsilon}{4} \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* ds,$$

mientras que la teoría de circuitos da  $W_e = \frac{C|V_0|^2}{4}$ , resultando en la siguiente expresión para la capacitancia por unidad de longitud:

$$C = \frac{\epsilon}{|V_0|^2} \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* ds, \text{F/m} \quad 3.18$$

Las pérdidas de potencia por unidad de longitud debido a la conductividad finita de los conductores metálicos es:

$$P_c = \frac{R_s}{2} \int_{C_1+C_2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^* dl$$

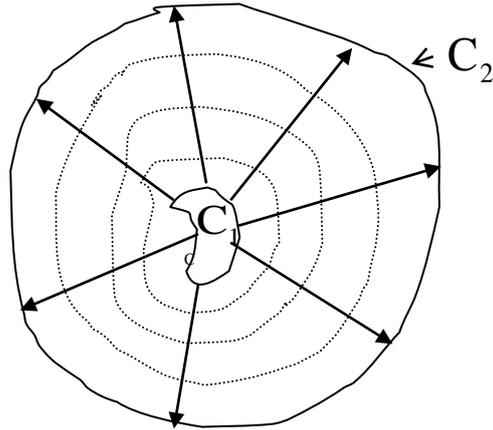


Fig. 3.2. Líneas de campo sobre una línea de transmisión arbitraria TEM.

(asumiendo que  $\mathbf{H}$  es tangencial a  $S$ ), mientras que la teoría de circuitos da  $P_C = \frac{R|I_0|^2}{2}$ , así la resistencia en serie  $R$  por unidad de longitud de línea es:

$$R = \frac{R_s}{|I_0|^2} \int_{C_1+C_2} \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{H} \, ds \left( \frac{\Omega}{m} \right) \quad 3.19$$

En (3.19),  $R_s = \frac{1}{\sigma \delta}$  es la Resistencia superficial de los conductores y  $C_1 + C_2$  representa la trayectoria de integración sobre las fronteras del conductor. La potencia disipada promedio temporal por unidad de longitud en un dieléctrico con pérdidas es:

$$P_d = \frac{\omega \epsilon''}{2} \int_S \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{E} \, ds$$

donde  $\epsilon''$  es la parte imaginaria de la constante dieléctrica compleja  $\epsilon = \epsilon' - j\epsilon'' = \epsilon'(1 - j \tan \delta)$ . La teoría de circuitos da  $P_d = G|V_0|^2/2$ , de esta manera la conductancia en paralelo por unidad de longitud se puede escribir como:

$$G = \frac{\omega \epsilon''}{|V_0|^2} \int_S \bar{\mathbf{E}} \cdot \bar{\mathbf{E}}^* \, ds \quad \text{S/m} \quad 3.20$$

Ejemplo 3.1.

Los campos de una onda TEM viajera dentro de la línea coaxial mostrada en la figura 3.3 pueden ser expresadas como:

$$\vec{E} = \hat{r} E_r,$$

$$\vec{H} = \hat{\phi} H_{\phi}$$

donde  $\gamma$  es la constante de proyección de la línea. Los conductores se suponen que tienen una resistividad superficial  $R_s$ , y el material que rellena el espacio entre los conductores se asume que tiene una permitividad compleja  $\epsilon = \epsilon' - j \epsilon''$  y una permeabilidad  $\mu = \mu_0 \mu_r$ . Determine los parámetros de la línea de transmisión.

Solución

De (3.17) - (3.20) y los campos de arriba los parámetros de la línea coaxial se pueden calcular como :

$$L = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

$$L = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

$$L = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

$$C = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{b}{a}}$$

$$C = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{b}{a}}$$

$$R = \frac{R_s}{2\pi} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$$

$$G = \frac{2\pi\sigma}{\ln \frac{b}{a}}$$

$$G = \frac{2\pi\sigma}{\ln \frac{b}{a}}$$

$$G = \frac{2\pi\sigma}{\ln \frac{b}{a}}$$

La tabla 3.1 resume los parámetros para líneas coaxial, de dos conductores y de placas paralelas. Como veremos en el siguiente capítulo, la constante de propagación, impedancia característica y atenuación de algunas líneas de transmisión se deducirán, directamente de una solución de teoría de campo; la aproximación aquí del primer encuentro de los parámetros de circuito equivalente (L, C, R, G) es solamente útil para

líneas relativamente simples. Sin embargo, provee un concepto intuitivo útil, y relaciona una línea con su modelo de circuito equivalente.

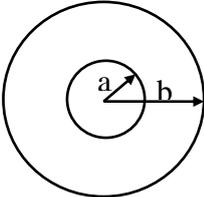
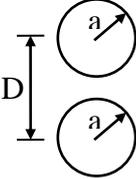
	COAXIAL	DOS ALAMBRES	PLACAS PARALELAS
			
<b>L</b>	¡Error!	¡Error!	¡Error!
<b>C</b>	¡Error!	¡Error!	¡Error!
<b>R</b>	¡Error!	¡Error!	¡Error!
<b>G</b>	¡Error!	¡Error!	¡Error!

Tabla 3.1 Parámetros de línea de transmisión para algunas líneas comunes.

### LAS ECUACIONES DEL TELEGRAFISTA DERIVADAS DEL ANÁLISIS DEL CAMPO DE UNA LÍNEA COAXIAL.

Ahora demostraremos que las ecuaciones del telegrafista (3.3), derivadas de la teoría de circuitos, también se pueden obtener de las ecuaciones de Maxwell. Consideremos la geometría específica de la línea coaxial de la fig. 3.3.

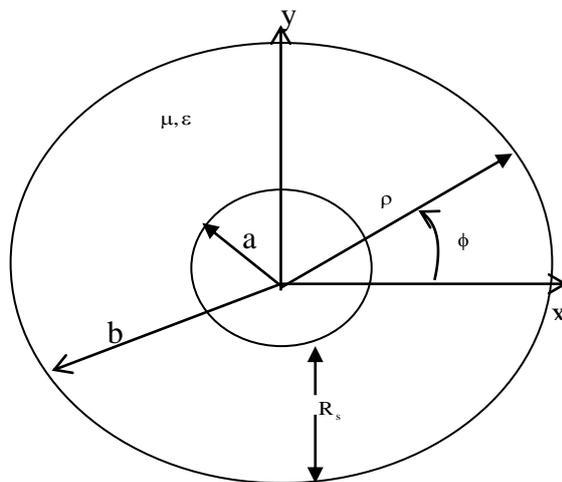


Fig. 3.3. Geometría de una línea coaxial con resistencia superficial  $R_S$  sobre los conductores interior y exterior.

Aunque trataremos propagación de onda *TEM* más generalmente en el próximo capítulo, la siguiente discusión provee alguna idea dentro de la relación entre las cantidades de campo y de circuito.

Una onda TEM sobre la línea coaxial de la figura 3.3 se caracterizará por  $E_z=H_z=0$ ; Sin embargo, debido a la simetría azimutal, los campos no tendrán variación en  $\phi$ , y así **¡Error!**. Los campos dentro de la línea coaxial satisfacen las ecuaciones de rotacional de Maxwell,

$$\nabla \times \bar{E} = -j \omega \mu \bar{H} \quad \dots 3.21a$$

$$\nabla \times \bar{H} = j \omega \epsilon \bar{E} \quad \dots 3.21b$$

donde  $\epsilon = \epsilon' - j\epsilon''$  puede ser complejo tomando en consideración un relleno dieléctrico con pérdidas, las perdidas del conductor se ignoran aquí. Un análisis de campo riguroso de perdidas de conductor se puede llevar a cabo, pero en este punto tendería a oscurecer nuestro propósito, el lector interesado refiérase a Ramo, Winnery, and Van Duzer (1) o Stratton (2).

Expandiendo (3.21a) y (3.21b) dan las siguientes ecuaciones vectoriales:

$$\nabla_{\rho} \times \bar{E} = -j \omega \mu (\rho H_{\rho} + \phi H_{\phi}) \quad \dots 3.22a$$

$$\nabla_{\rho} \times \bar{H} = j \omega \epsilon (\rho E_{\rho} + \phi E_{\phi}) \quad \dots 3.22b$$

Ya que las componentes  $z$  de estas 2 ecuaciones deben desvanecerse, se ve que  $E_{\phi}$  y  $H_{\rho}$  deben tener la forma:

$$E_{\phi} = \dots 3.23a$$

$$H_{\rho} = \dots 3.23b$$

Para satisfacer la condición de frontera la que  $E_{\phi} = 0$  en  $\rho = a, b$ , debemos tener  $E_{\phi} = 0$  donde sea, debido a la forma de  $E_{\phi}$  en (3.23a). Entonces de la componente  $\rho$  de (3.22a) se ve que  $H_{\rho} = 0$ . Con estos resultados, (3.22) se puede reducir a:

$$\mathbf{jError!} = -j \omega \mu H_\phi$$

...3.24a

$$\mathbf{jError!} = -j \omega \varepsilon E_\rho$$

...3.24b

De la forma de  $H_\phi$  en (3.23b) y (3.24a),  $E_\rho$  debe ser de la forma:

$$E_\rho = \mathbf{jError!} \quad \dots 3.25$$

usando (3.23b) y (3.25) en (3.24) da:

$$\mathbf{jError!} = -j \omega \mu y(z)$$

...3.26a

$$\mathbf{jError!} = -j \omega \varepsilon h(z)$$

...3.26b

Ahora el voltaje entre los dos conductores se puede evaluar como:

$$V(z) = \mathbf{jError!} \quad \dots 3.27a$$

y la corriente total sobre el conductor interior en  $\rho = a$  se puede evaluar usando (3.23 b) como:

$$\mathbf{jError!} \quad \dots 3.27 b$$

Entonces  $h(z)$  y  $g(z)$  se puede eliminar de (5.26) usando (3.27) para dar:

$$\mathbf{jError!} = -j \mathbf{jError!}$$

$$\mathbf{jError!} = -j \omega (\varepsilon' - j \varepsilon'') \mathbf{jError!}$$

Finalmente, usando los resultados para  $L$ ,  $G$  y  $C$  para una línea coaxial como se derivaron arriba, obtenemos las ecuaciones del telegrafista como:

$$\mathbf{jError!} = -j \omega L I(z)$$

...3.28a

$$\mathbf{jError!} = -(G + j \omega C) V(z)$$

...3.28b

(Excluyendo  $R$ , la resistencia en serie, debido a que en los conductores se asumió que tenían conductividad perfecta). Un análisis similar se puede llevar a cabo para otras líneas de transición simples.

## Constante de Propagación, Impedancia y Flujo de Potencia para la Línea “Coaxial sin Pérdidas”.

Las ecuaciones (3.24a) y (3.24b) se pueden resolver simultáneamente para obtener una ecuación de onda para  $E_\rho$  (o  $H_\phi$ ):

$$\text{¡Error!} \quad \dots 3.29$$

de la cual se ve que la constante propagación es  $\gamma^2 = -\omega^2 \mu \epsilon$ , la cual, para medios sin pérdidas, se reduce a:

$$\beta = \omega \sqrt{\mu \epsilon} = \omega \sqrt{LC} \quad \dots 3.30$$

donde el último resultado es de (3.12). Observe que esta constante de propagación es de la misma forma que con para ondas planas en un medio dieléctrico sin pérdidas. Este es un resultado general para líneas de transmisión TEM.

La impedancia de onda está definida como  $Z_\eta = \text{¡Error!}$ , la cual puede ser calculada de (3.24a) asumiendo una dependencia  $e^{-j\beta z}$  para dar:

$$\text{¡Error!} \quad \dots 3.31$$

se ve que;

Esta impedancia de onda es idéntica a la impedancia intrínseca de medio,  $\eta$ , y otra vez es un resultado general para líneas de transmisión TEM.

La impedancia característica de la línea coaxial está definida como:

$$\text{¡Error!} \quad \dots 3.32$$

donde han sido usadas las formas para  $E_\rho$  y  $H_\phi$  del ejemplo 3.1. La impedancia característica depende de la geometría, y será diferente para otras configuraciones de línea de transmisión.

Finalmente, el flujo de potencia (en la dirección  $z$ ) en la línea coaxial se puede calcular del vector de Poynting como:

$$P = \text{¡Error!}$$

$$P = \text{¡Error!} \quad \dots 3.33$$

Un resultado que está en claro con la teoría de circuitos.

Este muestra que el flujo de potencia en una línea de transmisión toma lugar enteramente entre los dos conductores vía los campos eléctrico y magnético. La potencia no se transmite a través de los conductores por ellos mismos. Como veremos después, para el caso de conductividad finita, la potencia puede entrar a los conductores, pero se perderá como calor y no se desarrollará en la carga.

### LA LÍNEA DE TRANSMISION TERMINADA SIN PERDIDAS.

La figura 3.4 muestra una línea de transmisión sin pérdidas terminada en una impedancia de carga arbitraria  $z_L$ . Este problema ilustrará reflexión de onda en líneas de transmisión, una propiedad fundamental de sistemas distribuidos.

Asuma que una onda incidente de la forma  $V_0^+ e^{-j\beta z}$  se genera de una fuente en  $z < 0$ . Hemos visto que la relación de voltaje a corriente para una onda viajera de este tipo es  $z_0$ , la impedancia característica. Pero cuando la línea está terminada en una carga arbitraria  $z_L \neq z_0$ , la relación de voltaje a corriente en la carga debe ser  $z_L$ . Así, una onda reflejada debe ser excitada con la amplitud apropiada para satisfacer esta condición. El voltaje total en la línea puede escribirse entonces como en (3.14a), como una suma de ondas incidente y reflejada:

$$V(z) = V_0^+ e^{-j\beta z} + V_0^- e^{+j\beta z} \quad \dots 3.34a$$

Similarmente, la corriente total en la línea está descrita por (3.14b):

$$I(z) = \frac{1}{z_0} (V_0^+ e^{-j\beta z} - V_0^- e^{+j\beta z}) \quad \dots 3.34b$$

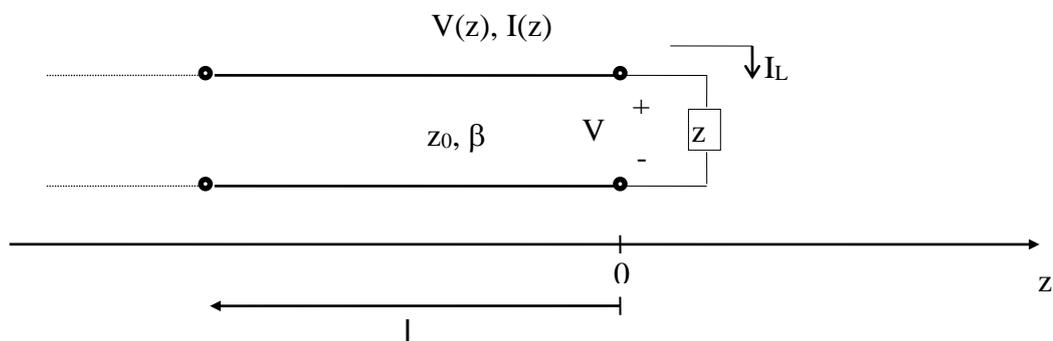


Figura 3.4. Una línea de transmisión terminada en una impedancia de carga  $z_L$ .

El voltaje y corriente total en la carga están relacionados por la impedancia de carga, en  $z = 0$  debemos tener:

$$z_L = \text{¡Error!}$$

Resolviendo para  $V_0^-$  da:

$$\begin{aligned} z_L (V_0^+ - V_0^-) &= (V_0^+ + V_0^-) z_0 \\ z_L V_0^+ - z_L V_0^- &= z_0 V_0^+ + z_0 V_0^- \\ z_L V_0^+ - z_0 V_0^+ &= z_L V_0^- + z_0 V_0^- \\ (z_L - z_0) V_0^+ &= (z_L + z_0) V_0^- \end{aligned}$$

$$\therefore V_0^- = \text{¡Error!}$$

La amplitud de la onda de voltaje reflejado normalizado a la amplitud de la onda de voltaje incidente se conoce como el coeficiente de reflexión de voltaje,  $\Gamma$ :

$$\Gamma = \text{¡Error!} \quad \dots 3.35$$

También se puede definir un coeficiente de reflexión de corriente, dando la amplitud normalizada de la onda de corriente reflejada. Pero debido a que tal coeficiente de reflexión de corriente es justo el negativo del coeficiente de reflexión de voltaje (como se ve de (3.34)), evitaremos confusión usando solo el coeficiente de reflexión de voltaje en este libro.

Las ondas de voltaje y corriente total en la línea pueden escribirse entonces como:

$$V(z) = v_0^+ [ e^{-j\beta z} + \Gamma e^{j\beta z} ] \quad 3.36 \text{ a}$$

$$I(z) = \frac{V_0}{Z_0} [ e^{-j\beta z} + \Gamma e^{j\beta z} ] \quad 3.36 \text{ B}$$

De estas ecuaciones se ve que el voltaje y corriente en la línea consisten de una superposición de una onda incidente y reflejada, tales ondas se llaman ondas estacionarias. Solo cuando  $\Gamma=0$  no existe onda reflejada. Para obtener  $\Gamma=0$ , la impedancia de carga  $Z_L$  debe ser igual a la impedancia característica  $Z_0$  de la línea de transmisión, como se ve de (3.35). se dice entonces que tal carga está acoplada a la línea, debido a que no existe reflexión de la onda incidente.

Ahora consideremos el flujo de potencia promedio temporal a lo largo de la línea en el punto  $Z$ :

$$P_{AV} = \frac{1}{2} \text{Re} [v(z) I^*(z)] = \frac{1}{2} \frac{|V_0^+|^2}{Z_0} \text{Re} \{ 1 - \Gamma^* e^{-2j\beta z} + \Gamma e^{2j\beta z} - |\Gamma|^2 \}$$

donde se a usado 3.36. Los dos términos de en medio en las llaves son de la forma

$$\begin{aligned} A - A^* &= (a_1 + jb_1) - (a_1 - jb_1) = a_1 + jb_1 - a_1 + jb_1 \\ &= 2jb_1 = 2j \text{Im} (A) \end{aligned}$$

y son puramente imaginarios. Estos simplifican el resultado a:

$$P_{AV} = \frac{1}{2} \frac{|V_0^+|^2}{Z_0} (1 - |\Gamma|^2) \quad 3.37$$

la cual muestra que el flujo de potencia promedio es constante en cualquier punto de la línea, y que la potencia total entregada a la carga ( $P_{AV}$ ) es igual a la potencia incidente ( $|V_0^+|^2 / 2Z_0$ ) menos la potencia reflejada ( $|V_0^+|^2 |\Gamma|^2 / 2Z_0$ ). Si  $\Gamma = 0$ , la potencia máxima es entregada a la carga, mientras que no se desarrolla potencia para  $|\Gamma|=1$ . La discusión anterior supone que el generador está aceptado, de manera que no existe re-reflexión de la onda reflejada desde  $Z < 0$

Cuando la carga está desacoplada, entonces, no toda la potencia disponible del generador es entregada a la carga. Esta “perdida” se llama pérdida de regreso (RL), y esta definida (en dB) como:

$$RL = -20 \log |\Gamma| \text{ dB}, \quad 3.38$$

de manera que una carga acoplada ( $\Gamma = 0$ ) tiene una pérdida de regreso de  $\infty$  dB (potencia no reflejada), mientras que una reflexión total ( $|\Gamma|=1$ ) tiene una pérdida de regreso de 0 dB (toda la potencia incidente esta reflejada).

Si la carga esta acoplada a la línea  $\Gamma=0$  y la magnitud de voltaje en la línea es  $|V(z)|=|V_0^+|$ , el cual es mas constante. A este tipo de línea algunas veces se le llama “FLAT” cuando la carga esta desacoplada, no obstante, la presencia de una onda reflejada nos lleva a ondas estacionarias donde la magnitud del voltaje en la línea no es constante. Así, de (3.36 a).

$$\begin{aligned} |V(z)| &= |V_0^+| |1 + \Gamma e^{2j\beta z}| = |V_0^+| |1 + \Gamma e^{-2j\beta l}| \\ &= |V_0^+| |1 + |\Gamma| e^{j(\theta - 2\beta l)}| \end{aligned}$$

Donde  $l = -z$  es la distancia positiva medida desde la carga en  $z=0$ , y  $\theta$  es la fase de coeficiente de reflexión ( $\Gamma = |\Gamma|e^{\theta}$ ). Este resultado muestra que la magnitud del voltaje oscila en la posición de  $z$  a largo de la línea. El máximo valor ocurre cuando el termino de fase

$$e^{j(\theta - 2\beta l)} = 1, \text{ y está dado por:}$$

$$V_{\text{máx}} = |V_0^+| (1 + |\Gamma|) \quad 3.40a$$

El valor mínimo ocurre cuando el término de fase

$$e^{j(\theta - 2\beta l)} = -1, \text{ y está dado por:}$$

$$V_{\text{mín}} = |V_o^+| (1+|\Gamma|) \quad 3.40b$$

cuando  $|\Gamma|$  se incrementa, la relación de  $V_{\text{máx}}$  a  $V_{\text{mín}}$  se incrementa, de esta manera una medida del desacoplamiento de una línea, llamada la relación de onda estacionaria (SWR), se puede definir como

$$SWR = \frac{V_{\text{máx}}}{V_{\text{mín}}} = \frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|} \quad 3.41$$

Esta cantidad también es conocida como la relación de onda estacionaria de voltaje, y se identifica algunas veces como VSWR. De (3.41) se ve que SWR es un número real tal que  $1 \leq SWR \leq \infty$ , donde  $SWR=1$  implica una carga acoplada.

De (3.39), se ve que la distancia entre 2 sucesivos voltajes máximos (o mínimos) es

$$l = \frac{2\pi}{2\beta} = \frac{\pi\lambda}{2\pi} = \frac{\lambda}{2}$$

### 3.3 Impedancia de Entrada, Relación de Onda Estacionaria

En la sección anterior se mostró que, cuando una línea de transmisión se termina en corto circuito o circuito abierto, hay una inversión de impedancia, cada cuarto de longitud de onda. Para una línea sin pérdidas, la impedancia varía de infinito a cero. Sin embargo, en una situación más real, donde ocurren pérdidas de potencia, la amplitud de la onda reflejada es siempre menor que el de la onda incidente, excepto en la terminación. Por lo tanto, la impedancia varía de algún valor máximo a algún valor mínimo, o viceversa, dependiendo de si la línea se termina en un corto o un circuito abierto. La impedancia de entrada para una línea sin pérdidas, vista desde una línea de transmisión que está terminada en un corto o un circuito abierto puede ser resistiva, inductiva, o capacitiva, dependiendo de la distancia que exista desde la terminación.

Los diagramas fasoriales se utilizan generalmente para analizar la impedancia de entrada de una línea de transmisión porque son relativamente simples y dan una representación gráfica de las relaciones entre las fases de voltaje y corriente. Las relaciones entre la fase de voltaje y corriente se refieren a las variaciones en tiempo.

En general, la tensión y la corriente en un punto cualquiera de la línea son:

$$v(z,t) = e^{i\omega t} [V_+ e^{-i\gamma z} + V_- e^{i\gamma z}] = V_+ e^{i\omega t} [e^{-i\gamma z} + \rho_L e^{i\gamma z}]$$

$$i(z,t) = e^{i\omega t} \left[ \frac{V_+}{Z_0} e^{-i\gamma z} - \frac{V_-}{Z_0} e^{i\gamma z} \right] = \frac{V_+}{Z_0} e^{i\omega t} [e^{-i\gamma z} - \rho_L e^{i\gamma z}]$$

de modo que podemos definir punto a punto una **impedancia de onda** como el cociente entre la tensión y la corriente:

$$Z(z) = \frac{v(z,t)}{i(z,t)} = Z_0 \frac{e^{-i\gamma z} + \rho_L e^{i\gamma z}}{e^{-i\gamma z} - \rho_L e^{i\gamma z}}$$

que podemos escribir en función de  $Z_L$  y  $Z_0$ :

$$Z(z) = Z_0 \frac{Z_L (e^{-i\gamma z} + e^{i\gamma z}) + Z_0 (e^{-i\gamma z} - e^{i\gamma z})}{Z_L (e^{-i\gamma z} - e^{i\gamma z}) + Z_0 (e^{-i\gamma z} + e^{i\gamma z})}$$

y finalmente:

$$Z(z) = Z_0 \frac{Z_L \cos(\gamma z) - i Z_0 \operatorname{sen}(\gamma z)}{Z_0 \cos(\gamma z) - i Z_L \operatorname{sen}(\gamma z)}$$

Como se ve, la impedancia de onda varía a lo largo de la línea y en general adopta valores complejos.

Por ejemplo, analicemos los casos de terminación más simples:

- a) línea adaptada  $Z_L = Z_0 \Rightarrow Z(z) = Z_0$
- b) línea cortocircuitada  $Z_L = 0 \Rightarrow Z(z) = -i Z_0 \tan(\gamma z)$
- c) línea abierta  $Z_L = \infty \Rightarrow Z(z) = -i Z_0 \cot(\gamma z)$

Se observa que si la línea no tiene pérdidas ( $Z_0$  y  $\gamma$  reales), la impedancia de onda resulta imaginaria pura. En algunas circunstancias, especialmente cuando se trabaja con conexiones en paralelo, es conveniente trabajar con admitancias. Por ejemplo, es fácil demostrar que:

$$\rho_L = \frac{V_-}{V_+} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \Rightarrow \rho_L = \frac{V_-}{V_+} = \frac{Y_0 - Y_L}{Y_0 + Y_L}$$

y la impedancia de onda puede escribirse:

$$Z(z) = Z_0 \frac{Z_L \cos(\gamma z) - i Z_0 \operatorname{sen}(\gamma z)}{Z_0 \cos(\gamma z) - i Z_L \operatorname{sen}(\gamma z)} = \frac{1}{Y_0} \frac{\frac{1}{Y_L} \cos(\gamma z) - i \frac{1}{Y_0} \operatorname{sen}(\gamma z)}{\frac{1}{Y_0} \cos(\gamma z) - i \frac{1}{Y_L} \operatorname{sen}(\gamma z)} = \frac{1}{Y_0} \frac{Y_0 \cos(\gamma z) - i Y_L \operatorname{sen}(\gamma z)}{Y_L \cos(\gamma z) - i Y_0 \operatorname{sen}(\gamma z)}$$

de donde

$$Y(z) = Y_0 \frac{Y_L \cos(\gamma z) - i Y_0 \operatorname{sen}(\gamma z)}{Y_0 \cos(\gamma z) - i Y_L \operatorname{sen}(\gamma z)}$$

es la **admitancia de onda** en la línea.

Si la línea tiene una longitud  $d$ , la impedancia que se ve a la entrada es la **impedancia de entrada** de la línea:

$$Z_{in} = Z(-d) = Z_0 \frac{Z_L \cos(\gamma d) + i Z_0 \operatorname{sen}(\gamma d)}{Z_0 \cos(\gamma d) + i Z_L \operatorname{sen}(\gamma d)}$$

y la **admitancia de entrada**:

$$Y_{in} = Y(-d) = Y_0 \frac{Y_L \cos(\gamma d) + i Y_0 \operatorname{sen}(\gamma d)}{Y_0 \cos(\gamma d) + i Y_L \operatorname{sen}(\gamma d)}$$

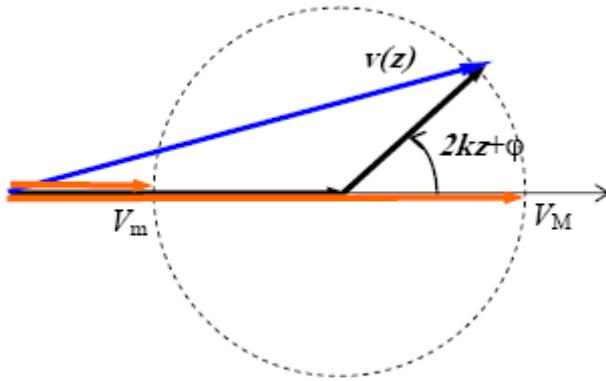
Por otra parte, vemos que la tensión a lo largo de la línea **ideal** se puede escribir:

$$v(z, t) = V_+ e^{i(\omega t - kz)} \left[ 1 + \rho_L e^{i2kz} \right] = V_+ \left[ 1 + |\rho_L| e^{i(2kz + \varphi)} \right] e^{i(\omega t - kz)}$$

que puede interpretarse como una onda progresiva de tensión cuya amplitud depende de  $z$  como:

$$V_+ \left[ 1 + |\rho_L| e^{i(2kz + \varphi)} \right]$$

Podemos pensar esta amplitud como la suma de dos fasores: uno constante de valor 1 y otro de valor variable con  $z$ , de manera que se puede representar gráficamente como en la figura, la suma de un fesor constante y un fesor cuyo ángulo de fase crece con  $z$ . Se observa que el fesor suma tendrá un máximo  $V_M$  y un mínimo  $V_m$  cuando el fesor móvil se halle en fase o en contrafase, respectivamente, del fesor fijo.



Estos valores son:

$$2kz_M + \varphi = 2n\pi \quad \Rightarrow \quad V_M = V_+(1 + |\rho_L|)$$

$$2kz_m + \varphi = (2n+1)\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad V_m = V_+(1 - |\rho_L|)$$

Definimos la **relación de onda estacionaria (ROE o SWR)** como la relación entre el máximo valor y el mínimo valor de tensión sobre la línea:

$$ROE = \frac{V_M}{V_m} = \frac{1 + |\rho_L|}{1 - |\rho_L|}$$

- En el caso de una onda puramente viajera  
 $\rho_L = 0 \Rightarrow ROE = 1$
- En el caso de una onda estacionaria pura  
 $|\rho_L| = 1 \Rightarrow ROE \rightarrow \infty$
- En general:  
 $|\rho_L| \leq 1 \Rightarrow 1 \leq ROE < \infty$

El coeficiente de reflexión y la ROE son parámetros relacionados con la existencia de reflexión de energía en la interfase línea-carga. En muchas situaciones esta reflexión es inconveniente, por lo que la medición y control de estos parámetros es una tarea de mantenimiento de importancia.

### 3.4 Carta de Smith

La **carta de Smith** es un tipo de nomograma, usado en ingeniería eléctrica, que muestra cómo varía la impedancia compleja de una línea de transmisión a lo largo de su longitud. Se usa frecuentemente para simplificar la adaptación de la impedancia de una línea de transmisión con su carga.

#### Definición

La carta de Smith es un diagrama polar especial que contiene círculos de resistencia constante, círculos de reactancia constante, círculos de relación de onda estacionaria constante y curvas radiales que representan los lugares geométricos de desfase en una línea de valor constante; se utiliza en la resolución de problemas de guías de ondas y líneas de transmisión.

#### Origen

Fue inventada por Phillip Smith en 1939 mientras trabajaba para RCA, aunque el ingeniero japonés Kurakawa inventó un dispositivo similar un año antes. El motivo que tenía Smith para hacer este diagrama era representar gráficamente las relaciones matemáticas que se podían obtener con una regla de cálculo.

La carta de Smith fue desarrollada en los Laboratorios Bell. Debido a los problemas que tenía para calcular la adaptación de las antenas a causa de su gran tamaño, Smith decidió crear una carta para simplificar el trabajo. De la ecuación de Fleming, y en un esfuerzo por simplificar la solución del problema de la línea de transmisión, desarrolló su primera solución gráfica en la forma de un diagrama rectangular.

Phillip persistió en su trabajo y el diagrama fue desarrollado gradualmente con una serie de pasos. La primera carta rectangular fue limitada por la gama de datos que podría acomodar. En 1936 desarrolló un nuevo diagrama que eliminó la mayoría de las dificultades. La nueva carta era una forma coordinada polar especial en la cual todos los valores de los componentes de la impedancia podrían ser acomodados.

Las curvas del cociente constante de la onda de la situación, de la atenuación constante y del coeficiente de reflexión constante eran todos los círculos coaxiales con el centro del diagrama. Las escalas para estos valores no eran lineales, pero eran satisfactorias. Con el tiempo la gente que trabaja en este ámbito propuso las cartas para solucionar problemas de las líneas de transmisión.

#### Usos de la carta de Smith

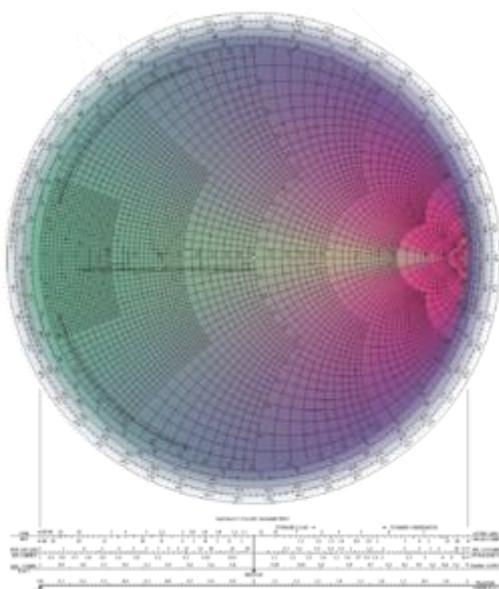
La carta de Smith es una herramienta gráfica usada para relacionar un coeficiente de reflexión complejo con una impedancia compleja. Se puede utilizar para una variedad de propósitos, incluyendo la determinación de la impedancia, la adaptación de la impedancia, la optimización del ruido, la estabilidad y otros. La carta de Smith es una ingeniosa técnica gráfica que

virtualmente evita todas las operaciones con números complejos. Por ejemplo, se puede determinar la impedancia de entrada a una línea de transmisión dando su longitud eléctrica y su impedancia de carga.

El resultado importante es el hecho de que el coeficiente de reflexión del voltaje y la impedancia de entrada a la línea normalizada en el mismo punto de la línea, están relacionados por la carta de Smith. En la parte exterior de la carta hay varias escalas. En la parte exterior de la carta está una escala llamada "ángulo del coeficiente de reflexión en grados", a partir de ésta se puede obtener directamente el valor del argumento del coeficiente de reflexión.

Un par de escalas de suma importancia son las que relacionan la longitud de la línea de transmisión desde el inicio con el coeficiente de reflexión. Una de estas dos escalas está en el lado izquierdo de la carta de Smith y la otra corre en el sentido de las manecillas del reloj, ésta se denomina *wavelengths toward generator* (longitudes de onda hacia el generador), lo cual indica que si se utiliza esta escala se estará avanzando hacia el generador, hacia la entrada de la línea. La otra escala corre en sentido contrario de las manecillas del reloj y se denomina *wavelengths toward load* (longitudes de onda hacia la carga); esto indica que, si se utiliza esta escala, se estará avanzando hacia la carga o final de la línea.

En el fondo de la carta hay un conjunto de varias escalas, una de las cuales se denomina *Reflection coeff. Vol* (Coeficiente de reflexión del voltaje). Si se mide la longitud del vector, trazado siempre desde el origen, se puede utilizar esta escala para conocer la magnitud del coeficiente de reflexión del voltaje.



## Precisión de la carta

La escala angular en el borde tiene divisiones de  $1/500$  de una longitud de onda (0,72 grados) y la escala del coeficiente de reflexión se puede leer a una precisión de 0,02, con lo que se demuestra que es absolutamente suficiente para la mayoría de los propósitos. Por ejemplo, si la longitud de onda en cable coaxial en 1 GHz es 20 centímetros, la carta de Smith localiza la posición a lo largo del cable a  $20/500$  centímetros o 0,4 milímetros y resulta claro a cualquier persona que ha manejado el cable en el 1GHz que no puede ser cortado a esta precisión.

Si se requiere mayor precisión, una sección agrandada de la carta se puede hacer fácilmente con una fotocopia.

NOTA: La carta es periódica con la longitud eléctrica, de periodicidad circular  $\lambda / 2$

## Ventajas Principales

Esta carta es una representación gráfica directa, en el plano complejo, del coeficiente de reflexión complejo. Es una superficie de Riemann, en que el coeficiente de reflexión es cíclico, repitiéndose cada media longitud de onda a lo largo de la línea. El número de medias longitudes de onda se puede representar por un valor de reactancia. Puede ser utilizado como calculadora de la impedancia o de la admitancia, simplemente dando la vuelta 180 grados (simetría con el origen).

El interior del círculo unidad representa el caso de reflexión de un circuito pasivo (en el origen no hay reflexión y en el borde,  $\rho=1$ , la reflexión es completa), por lo que es la región de interés más habitual. El movimiento a lo largo de la línea de transmisión sin pérdidas da lugar a un cambio del ángulo, y no del módulo o del radio de  $\gamma$ . Así, los diagramas se pueden hacer fácil y rápidamente.

Muchas de las características más avanzadas de los circuitos de microondas se pueden representar sobre la carta de Smith como círculos, por ejemplo, las regiones de la figura de ruido y de estabilidad de los amplificadores. El "punto en el infinito" representa el límite del aumento muy grande de la reflexión y, por lo tanto, nunca necesita ser considerado para los circuitos prácticos. Una proyección simple del lugar geométrico de la impedancia (o admitancia) en el diagrama sobre el eje real da una lectura directa del coeficiente de onda estacionaria (ROE o  $SWVR$ ) a través de la escala inferior correspondiente.

## DESARROLLO

La carta de Smith es una herramienta gráfica usada para relacionar un coeficiente de reflexión complejo con una impedancia compleja. La carta de Smith se puede utilizar para una variedad de propósitos incluyendo la determinación de la impedancia, emparejar de la impedancia, optimización del ruido, la estabilidad etc. La carta de Smith es una ingeniosa técnica gráfica que virtualmente evita todas las tediosas operaciones con números complejos. Por ejemplo, se puede determinar la impedancia de entrada a una línea de transmisión dando su longitud eléctrica y su impedancia de carga.

## Construcción de la carta de Smith

La expresión del coeficiente de reflexión en la carga,  $\rho_L(\Gamma)$ , en función de ésta,  $Z_L$ , y de la impedancia característica de la línea,  $Z_0$ :

$$\rho_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = |\rho_L| e^{j\theta_L} = \rho_r + j\rho_i \quad (1)$$

que se puede expresar en forma de módulo y fase  $|\rho_L|, \theta_L$  o como parte real e imaginaria  $\rho_r, \rho_i$ .

La impedancia de carga  $Z_L$ , normalizada con respecto a la impedancia característica de la línea  $Z_0$ , también puede escribirse en sus partes real e imaginaria como:

$$\frac{Z_L}{Z_0} = \frac{1 + \rho_L}{1 - \rho_L} = r + jx \quad (2)$$

donde  $r$  y  $x$  son la resistencia y la reactancia normalizadas, respectivamente. A partir de

(1) y (2) se pueden obtener las partes real e imaginaria de  $\rho_L$ .

$$\rho_L = \rho_r + j\rho_i = \frac{(r + jx) - 1}{(r + jx) + 1} = \frac{r^2 - 1 + x^2}{(r+1)^2 + x^2} + j \frac{2x}{(r+1)^2 + x^2} \quad (3)$$

Tomando las dos ecuaciones contenidas en (3) para las partes real e imaginaria y por eliminación de  $r$  o  $x$  pueden obtenerse las siguientes ecuaciones:

$$\left(\rho_r - \frac{r}{1+r}\right)^2 + \rho_i^2 = \left(\frac{1}{1+r}\right)^2 \quad (4)$$

$$(\rho_r - 1)^2 + \left(\rho_i - \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{x^2} \quad (5)$$

Si representamos la ecuación (4) sobre el plano  $(\rho_r, \rho_i)$  para valores de  $r$  constante, las gráficas obtenidas son círculos de radio  $1/(1+r)$  centrados en el eje real en los puntos  $\rho_r = r/(1+r), \rho_i = 0$ . Los distintos valores de  $r$  dan lugar a círculos de radio diferente con centro en distintas posiciones del eje real. La figura 1 muestra, en línea continua, los casos  $r=0, 0.5, 1$  y  $2$ . Todos los círculos pasan por el punto  $(1, 0)$ .

La ecuación (5), para valores de  $x$  constante, también describe círculos de radio  $1/|x|$ , centrados en  $\rho_r = 1, \rho_i = 1/x$ . En la figura 1 se muestra, en línea discontinua, los casos  $x=0, \pm 0.5, \pm 1$  y  $\pm 2$ . Nuevamente, todos los círculos pasan por el punto  $(1, 0)$ .

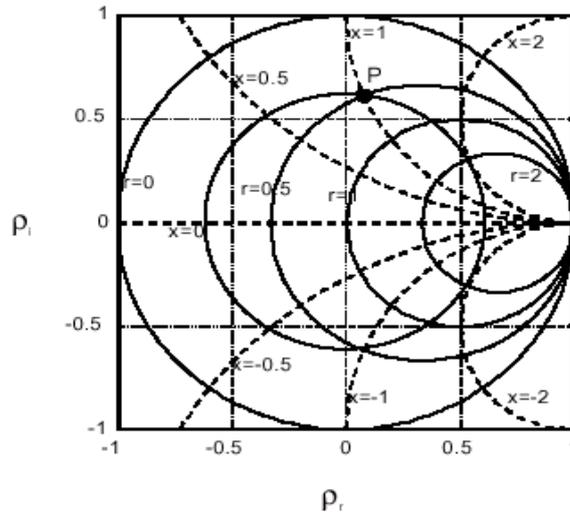


Figura 1 Carta de Smith

### Representación de impedancias normalizadas

La intersección de un círculo  $r$  y un círculo  $x$  define un punto que representa una impedancia normalizada:  $r+jx$ . Por ejemplo, el punto P de la figura 1 representa la impedancia normalizada  $0.5+j$ , un cortocircuito  $\rho_L=-1$  se representa en el punto  $(-1, 0)$  y un circuito abierto  $r_L=1$  en el punto  $(1, 0)$ .

### Obtención del coeficiente de reflexión

Si pensamos en la carta de Smith como una representación en polares, la distancia de un punto al origen de coordenadas se corresponde con el módulo del coeficiente de reflexión y el ángulo con respecto al eje real positivo se corresponde con su fase:

$$\sqrt{\rho_r^2 + \rho_i^2} = |\rho_L| \quad (6)$$

$$\arctan\left(\frac{\rho_i}{\rho_r}\right) = \theta_L \quad (7)$$

La carta de Smith proporciona ambas escalas, tanto para la lectura del módulo (en la parte inferior) como para la lectura de la fase (sobre el círculo

$r=1$ ).

Todas las impedancias que presenten el mismo módulo del coeficiente de reflexión se situarán sobre un círculo centrado en el origen. Por ejemplo, el punto P  $(0.5, 1)$  se corresponde con un coeficiente de reflexión  $0.62 \angle 83^\circ$  y en la

figura 1 se observa el círculo que representa  $|\rho|=0.62$ .

### Obtención de la ROE (o SWR)

La expresión que relaciona la ROE con el coeficiente de reflexión:

$$\text{ROE} = \frac{1 + |\rho_L|}{1 - |\rho_L|} \quad (8)$$

y la comparamos con la ecuación (2) vemos que la ROE coincide con el valor de la impedancia normalizada cuando la fase del coeficiente de reflexión es cero,

es decir, la intersección del círculo  $|\rho| = \text{cte}$  con el eje real positivo.

### Situación de los puntos $V_{\text{max}}$ y $V_{\text{min}}$

**Partiendo de la expresión de la onda de tensión en la línea en función del coeficiente de reflexión:**

$$|V(z)| = |V^+| \cdot |1 + \rho(z)| \quad (9)$$

es fácil comprobar que los máximos se producirán cuando la fase del coeficiente de reflexión sea cero y los mínimos cuando dicha fase sea  $\pi$ .

### Transformación de impedancias

**Si nos desplazamos desde la carga hacia el generador, el coeficiente de reflexión en cualquier punto  $z$  de la línea viene dado, en función del coeficiente de reflexión en la carga, por la expresión:**

$$\rho(z) = \rho_L e^{2\gamma z} \quad (10)$$

Un caso particular es el de las líneas sin pérdidas, donde la ecuación (10)

se reduce a:

$$\rho(z) = \rho_L e^{j2\beta z} \quad (11)$$

Por lo tanto, en una línea sin pérdidas, un desplazamiento  $z$  se traduce en un cambio de fase del coeficiente de reflexión, pero el módulo se mantiene constante. Por ejemplo, un desplazamiento de  $z = \lambda/8$  supone un incremento de fase de  $+\pi/2$  sobre el círculo de

módulo constante. Esto nos lleva a la obtención de un nuevo punto en la carta de Smith, que se corresponde con la impedancia vista desde ese punto.

De esta forma, la transformación de impedancias producida a lo largo de la línea puede deducirse observando los valores de  $r$  y  $x$  que se leen al desplazarse sobre círculos centrados en la carta (espirales si hay pérdidas). La carta de Smith proporciona dos escalas adicionales sobre su perímetro en  $\Delta z/\lambda$  (en longitudes de onda), una para los movimientos hacia el generador y otra para los movimientos hacia la carga.

### Obtención de admitancias

Partiendo de la ecuación de la impedancia vista desde un punto  $z$  hacia

la carga  $Z_L$ , en una línea sin pérdidas:

$$Z_{in} = R_0 \frac{Z_L - jR_0 \operatorname{tg}(\beta z)}{R_0 - jZ_L \operatorname{tg}(\beta z)} \quad (12)$$

Si normalizamos y vemos el caso particular de  $z=\lambda/4$ :

$$\frac{Z_{in}}{R_0} = \frac{R_0}{Z_L} = \frac{Y_L}{Y_0} \quad (13)$$

obtenemos la admitancia de carga normalizada. Vemos pues como el transformador  $\lambda/4$  actúa como un inversor de impedancias. Un desplazamiento de un cuarto de longitud de onda equivale a un cambio de fase de  $\pi$  radianes en el coeficiente de reflexión, por lo tanto el punto de la admitancia está diametralmente opuesto al de la impedancia correspondiente.

**También es posible emplear la carta de Smith como diagrama de admitancias, muy útil para resolver problemas de conexiones de líneas en paralelo (donde las admitancias se suman). Si se trabaja con admitancias normalizadas las posiciones de cortocircuitos y circuitos abiertos están invertidos respecto de la carta de impedancias y también se invierte la posición de los lados capacitivo e inductivo.**

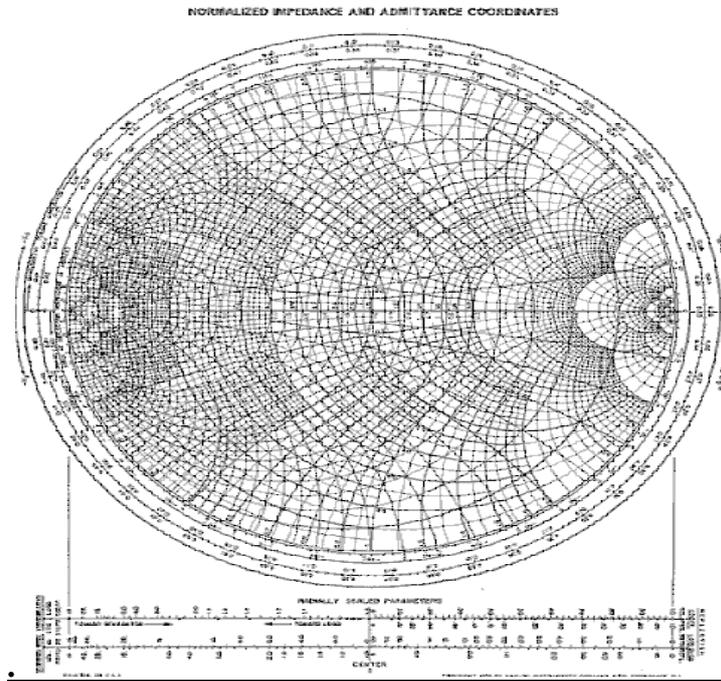


FIG. CARTA DE SMITH

El resultado importante es el hecho de que el coeficiente de reflexión del voltaje y la impedancia de entrada a la línea normalizada en el mismo punto de la línea, están relacionados por la carta de Smith. En la parte exterior de la carta hay varias escalas.

En la parte exterior de la carta está una escala llamada "ángulo del coeficiente de reflexión en grados", a partir de ésta se puede obtener directamente el valor de  $\theta_{\vec{r}}$ . Un par de escalas de suma importancia son las que relacionan la longitud de la línea de transmisión en el inicio de estas dos escalas está en el lado izquierdo de la carta de Smith y una de ellas corre en el sentido de las manecillas del reloj, ésta se denomina "wavelengths toward generator" (longitudes de onda hacia el generador), esto indica que si se utiliza esta escala se estará avanzando hacia el generador, hacia la entrada de la línea. La otra escala corre en sentido contrario de las manecillas del reloj y se denomina "wavelengths toward load" (longitudes de onda hacia la carga), esto indica que si se utiliza esta escala se estará avanzando hacia la carga, hacia el final de la línea .

En el fondo de la carta hay un conjunto de varias escalas, una de las cuales está denominada "Reflection coeff. Vol" (Coeficiente de reflexión del voltaje). Si se mide la longitud del vector, trazado siempre desde el origen, se puede utilizar esta escala para conocer la magnitud del coeficiente de reflexión del voltaje.

### 3.6 Ecuaciones de Maxwell aplicadas a líneas de transmisión.

## ANALISIS DEL CAMPO DE LINEAS DE TRANSMISION

En esta sección re derivaremos la forma armónica temporal de las ecuaciones del telegrafista, iniciando con las ecuaciones de Maxwell. Empezaremos deduciendo los parámetros de la línea de transmisión (R,L,G,C) en términos de los campos eléctrico y magnético de la línea de transmisión y entonces deduciremos las ecuaciones del telegrafista usando estos parámetros para el caso específico de una línea coaxial.

### Parámetros de la línea de transmisión

Considere un metro de sección de una línea de transmisión uniforme con campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$ , como se muestran en la figura 3.2, donde  $\mathbf{S}$  es el área de la superficie seccional transversal de la línea. Siendo el voltaje entre los conductores  $V_0 e^{\pm j\beta z}$  y la corriente  $I_0 e^{\pm j\beta z}$ . La energía magnética almacenada promedio temporal para este metro de sección de línea se puede escribir como:

$$W_m = \frac{\mu}{4} \int_S \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^* ds,$$

mientras que la teoría de circuitos da  $w_m = \frac{L|I_0|^2}{4}$  en términos de la corriente en la línea. Podemos así identificar la inductancia propia por unidad de longitud como:

$$L = \frac{\mu}{|I_0|^2} \int_S \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^* ds \left( \frac{H}{m} \right)$$

Similarmente, la energía eléctrica almacenada promedio temporal por unidad de longitud se puede encontrar mediante:

$$W_e = \frac{\epsilon}{4} \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* ds,$$

mientras que la teoría de circuitos da  $\frac{W_e = C|V_0|^2}{4}$ , resultando en la siguiente expresión para la capacitancia por unidad de longitud:

$$C = \frac{\epsilon}{|V_0|^2} \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* ds, F/m$$

Las pérdidas de potencia por unidad de longitud debido a la conductividad finita de los conductores metálicos es:

$$P_c = \frac{R_s}{2} \int_{C_1+C_2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^* dl$$

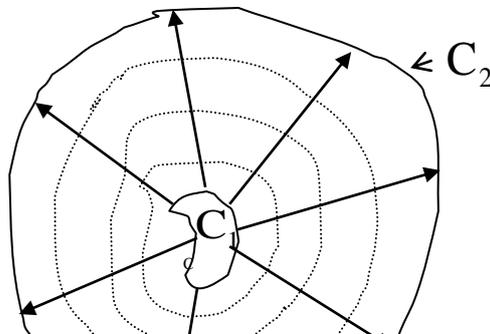


Fig. 3.2. Líneas de campo sobre una línea de transmisión arbitraria TEM.

(asumiendo que  $\mathbf{H}$  es tangencial a  $S$ ), mientras que la teoría de circuitos da  $P_C = \frac{R|I_0|^2}{2}$ , así la resistencia en serie  $R$  por unidad de longitud de línea es:

$$R = \frac{R_s}{|I_0|^2} \int_{C_1+C_2} \mathbf{H} * \mathbf{H}^* ds \left( \frac{\Omega}{m} \right)$$

En (3.19),  $R_s = \frac{1}{\sigma \delta s}$  es la Resistencia superficial de los conductores y  $C_1 + C_2$  representa la trayectoria de integración sobre las fronteras del conductor. La potencia disipada promedio temporal por unidad de longitud en un dieléctrico con pérdidas es:

$$P_d = \frac{\omega \epsilon''}{2} \int_S \mathbf{E} * \mathbf{E}^* ds$$

donde  $\epsilon''$  es la parte imaginaria de la constante dieléctrica compleja  $\epsilon = \epsilon' - j\epsilon'' = \epsilon'(1 - j \tan \delta)$ . La teoría de circuitos da  $P_d = G|V_0|^2 / 2$ , de esta manera la conductancia en paralelo por unidad de longitud se puede escribir como:

$$G = \frac{\omega \epsilon''}{|V_0|^2} \int_S \bar{\mathbf{E}} \cdot \bar{\mathbf{E}}^* ds \quad \text{S/m}$$

### 3.7 Líneas de Transmisión de microcinta

#### Líneas de cinta

Las líneas de cinta se utilizan mucho en aplicaciones electrónicas. Se las usa por su facilidad de construcción en circuitos integrados y para crear componentes de circuitos como filtros, acopladores, resonadores, antenas y otros. Hay diversas variantes de las líneas de cinta, de las que las más usadas son la línea de cinta propiamente dicha (stripline) y la línea de microcinta (microstrip).

#### Stripline

Las striplines están formadas por dos cintas conductoras paralelas de tierra, y una cinta conductora interna de señal entre ellas. El ancho  $w$  de la cinta de señal es pequeño frente al ancho de las cintas de tierra, de manera que éstas pueden considerarse planos infinitos. El espesor de la cinta de señal es  $t$  y la separación entre las cintas de tierra,

llena con un dieléctrico de permitividad  $\epsilon$ , es  $b$ . Hay fórmulas aproximadas en la literatura para calcular la impedancia característica de una línea stripline.

### **Microstrip**

A diferencia de la stripline, las líneas microstrip son estructuras abiertas, de forma que las líneas de campo no están confinadas y la propagación debe analizarse en rigor con las técnicas de campos de las guías de onda. Sin embargo, a bajas frecuencias es posible un análisis cuasi-estático con parámetros distribuidos como el que realizamos en este capítulo. Hay diversas variantes constructivas de estas líneas, y a modo de ejemplo presentamos la configuración clásica de la figura. Una cinta conductora muy ancha funciona como plano de tierra y sobre ella se coloca un sustrato dieléctrico de permitividad  $\epsilon$  y espesor  $b$ . Sobre el sustrato hay una cinta de señal de espesor  $t$  y ancho  $w$ .

La impedancia característica de la línea es de difícil cálculo debido al campo disperso fuera de la región entre los conductores. Las expresiones más conocidas son las halladas por Wheeler<sup>7</sup>. A partir de ellas se han realizado aproximaciones y mejoras para diversas situaciones. En esta sección solamente presentamos las fórmulas más sencillas en las que se desprecia el espesor  $t$  de la cinta de señal.

## 4. Guías de Onda

### 4.1 Introducción a las guías de onda rectangulares

Ventajas con respecto al cable coaxial:

- Mayor capacidad de transmitir potencia.
- Menores pérdidas por unidad de longitud.
- Estructura mecánica más simple y de menor coste.
- Las reflexiones producidas al conectar secciones de guía son menores.

Desventajas con respecto al coaxial:

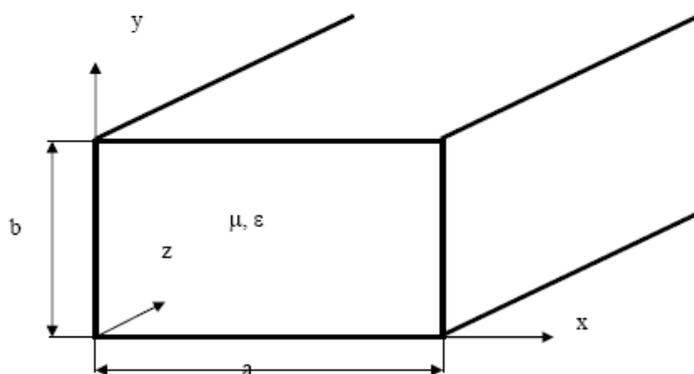
- Mayores dimensiones transversales.
- Propagación a partir de una frecuencia de corte.

#### Guía rectangular

Planteamiento de la ecuación de onda.

- Soluciones de los campos:
- Modos TM
- Modos TE
- Frecuencias de corte.
- Modelos comerciales.
- Potencia transmitida.
- Atenuaciones debidas al dieléctrico y al conductor.
- Modo fundamental TE<sub>10</sub>

#### ■ Guía rectangular



$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + k_c^2 A_z = 0$$

## 4.2 Modos magnéticos transversales (TM).

- Guía rectangular, modos TM:

$$E_z = \Re e \left[ A \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi}{a} x \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi}{b} y \right) \cdot e^{j(\omega t - \beta z)} \right]$$

$$E_t = \frac{-\gamma}{k_c^2} \nabla_t E_z$$

$$H_t = \frac{j\omega\epsilon}{k_c^2} \nabla_t \times E_z$$

$$k_c^2 = \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \quad Z_{TM} = \frac{\gamma}{j\omega\epsilon} = \eta \sqrt{1 - \left( \frac{k_c}{k} \right)^2}$$

$$\beta_{mn} = \sqrt{k^2 - k_c^2} = \sqrt{k^2 - \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 - \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2}$$

## 4.3 Modos Eléctricos Transversales (TE).

- Guía rectangular, modos TE:

$$H_z = \Re e \left[ B \cos \left( \frac{m\pi}{a} x \right) \cos \left( \frac{n\pi}{b} y \right) \cdot e^{-j(\omega t - \beta z)} \right]$$

$$H_t = \frac{-j\beta}{k_c^2} \nabla_t H_z$$

$$k_c^2 = \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \quad Z_{TE} = \frac{j\omega\mu}{\gamma} = \frac{\eta}{\sqrt{1 - \left( \frac{k_c}{k} \right)^2}}$$

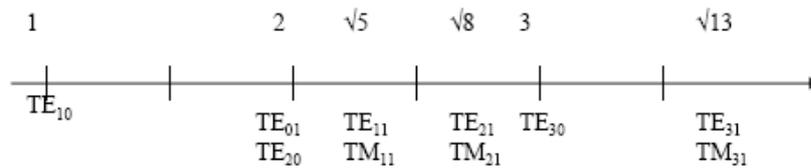
$$E_t = \frac{-j\omega\mu}{k_c^2} \nabla_t \times H_z$$

$$\beta_{mn} = \sqrt{k^2 - k_c^2} = \sqrt{k^2 - \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 - \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2}$$

- Guía rectangular, frecuencias de corte:

$$f_{c_{TE_{10}}} = \frac{1}{2a\sqrt{\mu\epsilon}} \quad R_{TE_{mn}} = \sqrt{m^2 + \left(\frac{na}{b}\right)^2}$$

$$f_{c_{TM_{11}}} = \frac{1}{2a\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2} \quad R_{TM_{mn}} = \sqrt{m^2 + \left(\frac{na}{b}\right)^2}$$



- Guía rectangular, número de ondas al corte

$$k_{c_{mn}}^2 = k_x^2 + k_y^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$$

- Constante de propagación

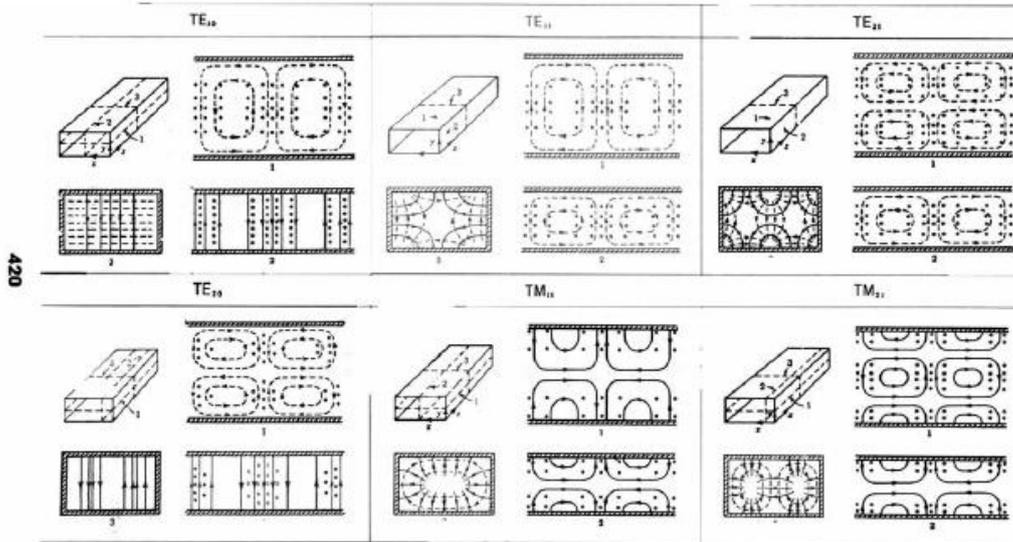
$$\beta_{mn} = \sqrt{k^2 - k_{c_{mn}}^2} = \sqrt{k^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} = \frac{2\pi}{\lambda_g}$$

- Longitud de onda en la guía

$$\lambda_g = \frac{2\pi}{\beta_{mn}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}$$

## 4.4 Propagación de las ondas en la guía.

### ■ Guía rectangular, Configuraciones de los campos:



### ■ Guía rectangular, modelos estándar:

E. I.A. EQUIV	TYPE MIL-W-85C	PART DASH NO. M85/1	DIMENSION INTERNA EN PULGADAS	DIMENSION EXTERNA EN PULGADAS	GROSOR DEL METAL EN PULGADAS	PREC. TOL. +/-	FREC. DE CORTE TE <sub>10</sub> EN GHz	PESO APROX. POR PIE(30 cm)
WR28	----	----	.280 x .140	.360 x .220	.040	.002	21,091	.048
WR34	RG355/U	111	.340 x .170	.420 x .250	.040	.001	17,369	.055
WR42	RG121/U	104	.420 x .170	.500 x .250	.040	.001	14,061	.065
WR51	----	----	.510 x .255	.570 x .315	.030	.002	11,579	.061
WR51	RG351/U	098	.510 x .255	.590 x .335	.040	.002	11,579	.084
WR62	RG349/U	091	.622 x .311	.702 x .391	.040	.002	9,494	.097
WR75	RG347/U	084	.750 x .375	.850 x .475	.050	.001	7,874	.150
WR90	RG67/U	078	.900 x .400	1.000 x .500	.050	.001	6,561	.165
WR102	RG320/U	158	1.020 x .510	1.148 x .638	.064	.002	5,790	.270
WR112	RG68/U	072	1.122 x .497	1.250 x .625	.064	.002	5,263	.260
WR137	RG106/U	066	1.372 x .622	1.500 x .750	.064	.002	4,304	.324
WR159	RG344/U	060	1.590 x .795	1.718 x .923	.064	.002	3,714	.383
WR187	RG95/U	054	1.872 x .872	2.000 x 1.000	.064	.002	3,155	.441

#### 4.5 Transmisión de potencia y atenuación

- Potencia transmitida

$$P_{m,n} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[ \oint_S (\vec{E} \times \vec{H}^*) d\vec{S} \right]$$

$$P_{m,n} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[ \int_0^a \int_0^b (E_X H_Y^* - E_Y H_X^*) dx dy \right] = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{Z_{TE}} \int_0^a \int_0^b (E_X E_X^* + E_Y E_Y^*) dx dy \right]$$

- Expresado en función de las componentes longitudinales:

$$P_{TM} = \frac{Z_{TM}}{2\eta^2} \left( \frac{f}{f_c} \right) \int_S |E_z|^2 dS \quad P_{TE} = \frac{\eta^2}{2Z_{TE}} \left( \frac{f}{f_c} \right) \int_S |H_z|^2 dS$$

- Potencia transmitida modos TE

$$P_{TE_{m,n}} = \left( \frac{Bw\mu}{k_c} \right)^2 \frac{1}{2\eta} \left( \frac{a}{\epsilon_{0m}} \right) \left( \frac{b}{\epsilon_{0n}} \right) \sqrt{1 - \left( \frac{f_{cm,n}}{f} \right)^2}$$

$$\epsilon_{0i} = \begin{cases} 2 & i \neq 0 \\ 1 & i = 0 \end{cases}$$

- Potencia transmitida modos TM

$$P_{TM_{m,n}} = \left( \frac{Aw\epsilon}{k_c} \right) \frac{\eta ab}{8} \sqrt{1 - \left( \frac{f_{cm,n}}{f} \right)^2}$$

- Atenuación por unidad de longitud

$$\alpha = \frac{P_l}{2P_T} = \frac{P_{lc} + P_{ld}}{2P_T} \quad \text{Pl: potencia perdida por unidad de longitud}$$

- Atenuación de la guía en modos TM

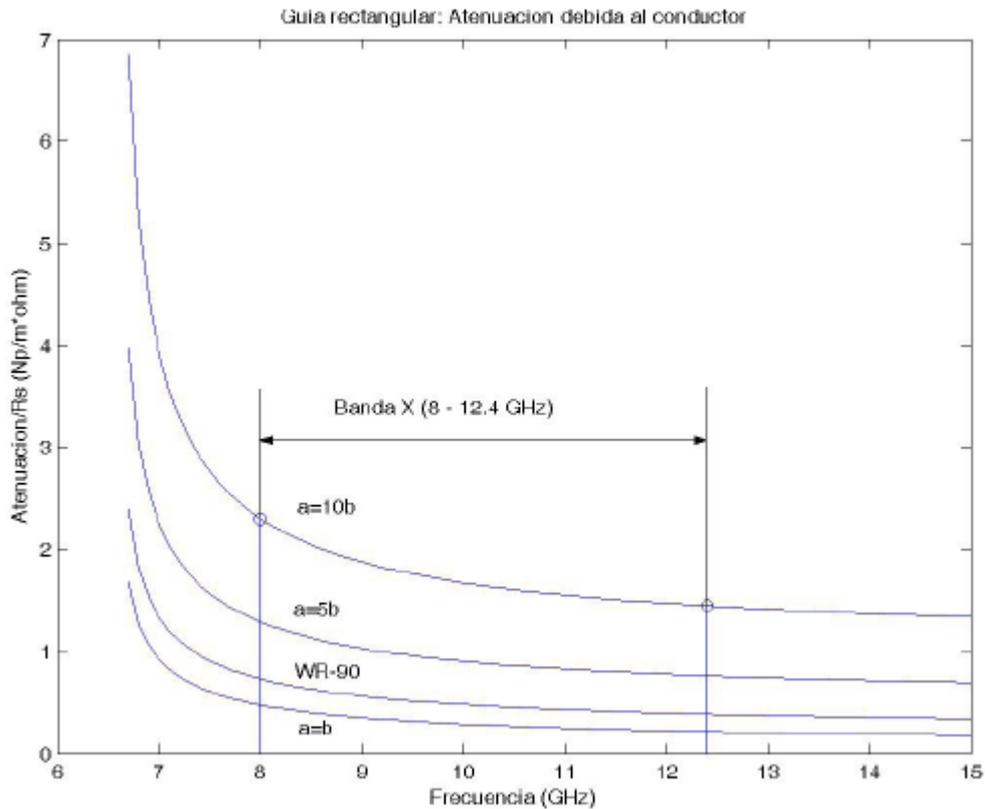
$$P_{lc} = \frac{R_s}{2} \oint_C |H_{ts}|^2 dl \quad \text{C: contorno de los conductores del sistema}$$

$$\alpha_{C_{TMn}} = \frac{2R_s}{ab\eta \sqrt{1 - \left(\frac{k_{Cmn}}{k}\right)^2}} \cdot \frac{m^2 b^3 + n^2 a^3}{(mb)^2 + (na)^2} \quad \alpha_{D_{mn}} = \frac{k\varepsilon''}{2\varepsilon'} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_{Cmn}}{f}\right)^2}}$$

- Atenuación en modos TE

$$\alpha_{C_{TEM}} = \frac{2R_s}{\varepsilon_{0m}\varepsilon_{0n}b\eta \sqrt{1 - \left(\frac{f_{Cmn}}{f}\right)^2}} \cdot \left[ \left( \varepsilon_{0m} + \varepsilon_{0n} \frac{b}{a} \right) \left( \frac{f_{Cmn}}{f} \right)^2 + \frac{b}{a} \left( 1 - \left( \frac{f_{Cmn}}{f} \right)^2 \right) \frac{m^2 ab + (na)^2}{(mb)^2 + (na)^2} \right]$$

$$\alpha_{D_{mn}} = \frac{k\varepsilon''}{2\varepsilon'} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_{Cmn}}{f}\right)^2}}$$



■ Guía rectangular, modo dominante:

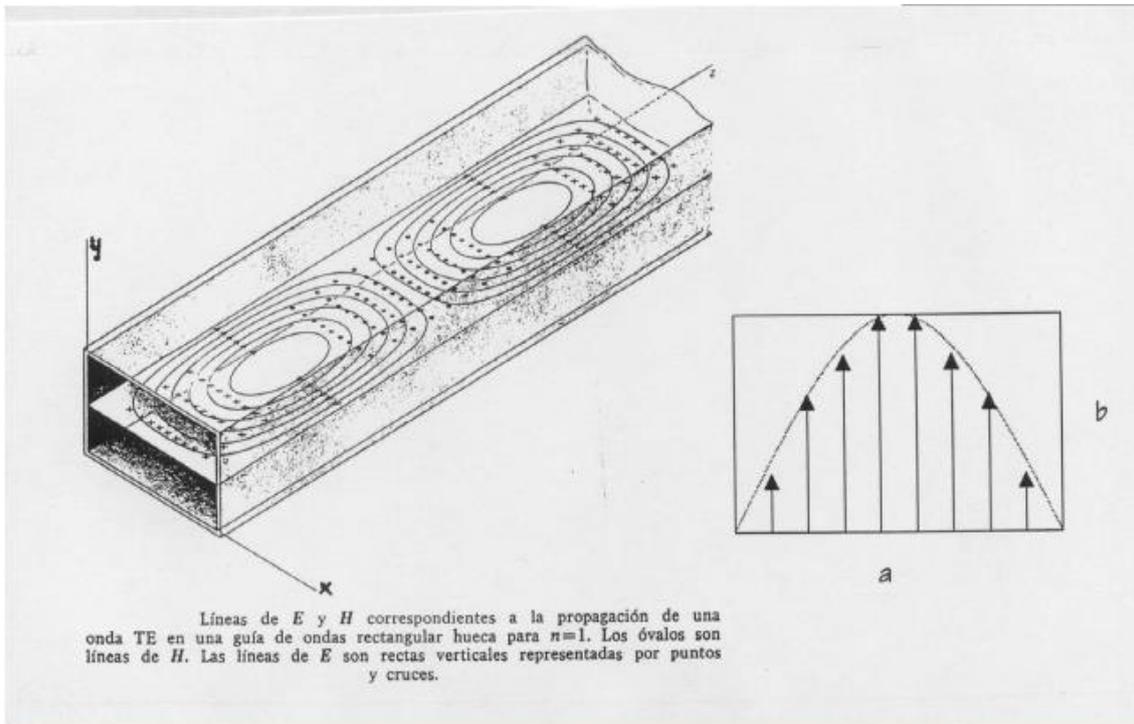
- El primero de los modos confinados es el TE<sub>10</sub>.
- Su frecuencia de corte es independiente de una de las dimensiones de la guía. Es posible variar b para optimizar la atenuación.
- La polarización del campo eléctrico es fija. Lineal en la dirección y. La excitación y extracción de este modo es muy sencilla.
- Para una frecuencia dada, la atenuación debida a las pérdidas en el conductor es menor que en otros tipos de guía de tamaño comparable.

$$H_z = B \cos \frac{\pi x}{a} \cos(\omega t - \beta_{10} z)$$

$$H_x = -\frac{\beta_{10}}{k_{c10}} B \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} \operatorname{sen}(\omega t - \beta_{10} z)$$

$$E_y = Z_{TE10} \frac{\beta_{10}}{k_{c10}} B \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} \operatorname{sen}(\omega t - \beta_{10} z)$$

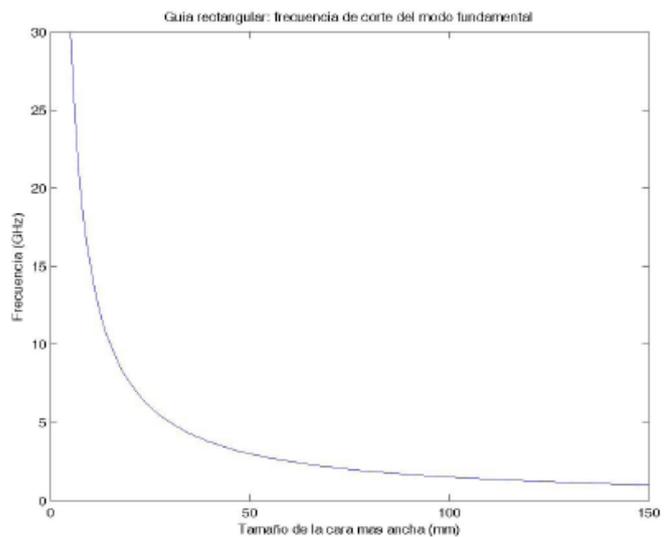
## Modo TE10



### ■ Frecuencias de corte

$$f_c = \frac{1}{2a\sqrt{\mu\epsilon}}$$

$$\lambda_c = 2a$$

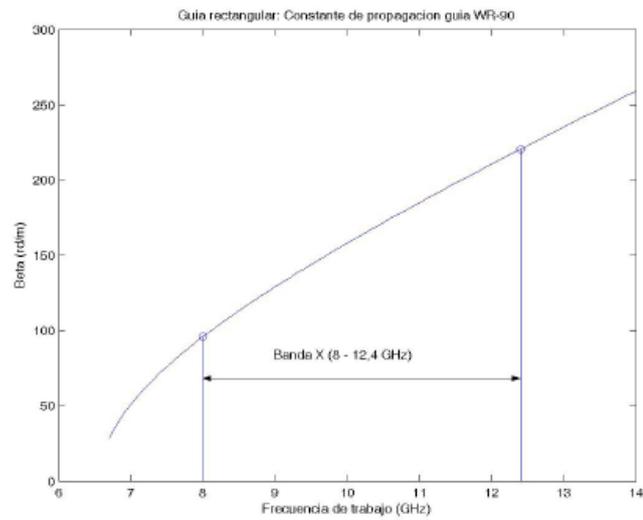


## ■ Velocidades de propagación

$$v_{ph} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}}$$

$$v_g = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}}$$

$$\lambda_g = \frac{v_{ph}}{f} = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}}$$



## ■ Guía rectangular, modo dominante, potencia transmitida y atenuaciones:

$$P_{TE_{10}} = \left(\frac{Bw\mu}{k_{TE_{10}}}\right)^2 \frac{ab}{4\eta} \sqrt{1 - \left(\frac{f_{c_{TE_{10}}}}{f}\right)^2}$$

$$\alpha_{DTE_{10}} = \frac{k\epsilon''}{2\epsilon'} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_{c_{TE_{10}}}}{f}\right)^2}}$$

$$\alpha_{C_{TE_{10}}} = \frac{R_s}{b\eta \sqrt{1 - \left(\frac{f_{c_{TE_{10}}}}{f}\right)^2}} \cdot \left[ \left(1 + \frac{2b}{a}\right) \left(\frac{f_{c_{TE_{10}}}}{f}\right)^2 \right]$$

