TECNOLOGICO DE ESTUDIOS SUPERIORES DE ECATEPEC

DIVISIÓN DE INGENIERÍA ELECTRONICA Y TELEMÁTICA

MATEMATICAS
Curso Propedéutico

2006-2

ÍNDICE

INTRODUCCION

Uno de los problemas fundamentales que se presentan al estudiar un fenómeno físico, (fenómeno real), es la posibilidad de determinar la relación que existe entre todas las cantidades necesarias, o suficientes, para describir a dicho fenómeno. Al establecer la relación que existe entre todas estas cantidades, se plantea la posibilidad de poder determinar el comportamiento del fenómeno para condiciones impuestas por agentes externos al fenómeno. A este proceso se le denomina modelación.

Por ejemplo, al estudiar el fenómeno de tiro parabólico se deseaba determinar la relación que existe entre las cantidades necesarias para describir con precisión el comportamiento del fenómeno. Se encontró que las variables importantes y necesarias eran la velocidad inicial del disparo, el ángulo de inclinación del disparo en la maquina de tiro, y ciertas cantidades como son: la masa del cuerpo, la gravedad de la tierra, el coeficiente de fricción, etc. De esta forma se encuentra una ecuación, que corresponde a una ecuación diferencial de segundo orden. La solución de esta ecuación diferencial permite determinar la relación entre todas las cantidades involucradas en el fenómeno. Esta relación permite predecir con certeza donde puede caer un cuerpo de cierta masa, disparado con una cierta velocidad, y un ángulo de inclinación, considerando las características externas al fenómeno.

De esta forma, el propósito fundamental del estudio de un fenómeno real consiste en contar con la posibilidad de predecir el comportamiento del fenómeno estudiado, predecir resultados, para así poder tomar decisiones.
La necesidad de buscar la predicción del comportamiento de un fenómeno en forma exacta hace necesario utilizar un modelo que sea lógicamente estricto, para evitar la ambigüedad de los posibles resultados. Este modelo lo proporciona la Matemática.

La Matemática y la Física proporcionan todos los elementos necesarios para construir un modelo lógicamente estricto del fenómeno estudiado. La relación que se puede establecer entre todas las posibles cantidades necesarias para describir a un fenómeno se denomina función.

El estudio y análisis de las propiedades generales de las funciones recae fundamentalmente, a un nivel básico, en el Cálculo Integral y Diferencial. El cálculo integral y diferencial proporciona la información necesaria y suficiente sobre una función, y para esto necesita manipular cantidades abstractas que representan a los posibles valores que pueden tomar todas las cantidades involucradas en la descripción del fenómeno. La forma en que estas cantidades abstractas se relacionan entre sí esta determinada por las propiedades y reglas del Álgebra de los Números reales.

De esta forma, el objetivo de este material es proporcionar todos los elementos necesarios del Álgebra de los Números Reales para poder definir e implementar las estrategias adecuadas para el estudio de un fenómeno, con el fin de poder describir su comportamiento y predecir nuevos resultados. El conocimiento del comportamiento de un fenómeno permite plantearse el problema del diseño y construcción de nuevos dispositivos basados en las propiedades del fenómeno estudiado.

ÍNDICE

SISTEMA DE LOS NUMEROS REALES

La descripción de los fenómenos naturales, y la posibilidad de poder controlarlos y predecir su comportamiento bajo condiciones impuestas desde agentes externos al fenómeno, hace necesario abstraer los procedimientos de dicho fenómeno y formular modelos matemáticos que describan fielmente al fenómeno. El Modelo matemático describe de manera abstracta al fenómeno. Todos los procedimientos y procesos que se verifican en el fenómeno son representados por operaciones abstractas entre objetos generalizados (objetos matemáticos).

Al introducir un conjunto de "objetos" generales, se hace necesario poder definir operaciones que permitan combinar los objetos de dicho conjunto. Una de las características que deben de satisfacer las operaciones introducidas en el conjunto es que sean consistentes. Esto significa que si se toman dos "objetos" o elementos del mismo tipo y se efectúa una operación con ellos se espera que el resultado sea un elemento del mismo tipo. Esta condición es la pieza fundamental para poder definir operaciones en un conjunto dado. Se denomina propiedad de Cerradura o Clausura. Toda operación que satisfaga esta propiedad se dice que está bien definida. Si una operación no está bien definida en un conjunto, esta debe ser eliminada (el cual es el caso menos interesante), o introducir nuevos elementos en el conjunto para que dicha operación esté ya bien definida. De esta forma se obtienen conjunto más generales y más ricos en estructura matemática. Esto es, se pueden hacer más cosas.
Uno de los conjuntos más relevantes en las matemáticas es el conjunto de los Números Reales. Estos pernean toda la estructura matemática que se utiliza en las Ciencias de la Ingeniería. Este es el motivo de su estudio.

Números Reales.

El conjunto de los números reales es el conjunto que contiene a todos los números que se utilizan en el Cálculo diferencial e integral de funciones reales de variable real. El Cálculo que se utiliza regularmente en las de las Ciencias de las Ingenierías. Alguna vez se hablará de un tipo especial de números denominados Números Complejos.

Los Números Reales tienen una estructura bien definida, en términos de conjuntos de números más elementales.

Números Naturales.
El conjunto de números más simple es el conjunto de los ***Números Naturales****. Este conjunto se denota por el símbolo* ***N****, y esta definido en la forma:*

$$\boldsymbol{N} = \{1,2,3,4,5,6,\ldots\}$$

El conjunto de los números Naturales contiene a todos los números que se utilizan para contar. La operación fundamental que se puede definir en este conjunto es la operación de Adición o Suma. La operación de Adición satisface la propiedad de Cerradura. Esto significa que si se suman dos números naturales el resultado es un número natural.

Es posible que se necesite sumar un mismo número varias veces. Esto es, una suma repetida. Se puede introducir una representación de esta suma repetida, y al hacerlo se introduce una nueva operación.

$$3+3+3+3+3+3+3+3=8\times 3$$

A la nueva operación se le denomina Multiplicación o producto.
En la operación 8×3, el 8 indica que el número 3 se suma consigo mismo de tal forma que aparece 8 veces en la suma repetida. Pero se puede plantear de otra forma, ya que es posible cambiar de orden los elementos de la operación, y escribir 3×8, la cual indica que el número 8 se suma consigo mismo de tal forma que el 8 aparece 3 veces en la suma repetida. A esta propiedad se le denomina Propiedad conmutativa.
Entonces, en los números naturales solo se pueden efectuar operaciones de Suma y Multiplicación, de tal manera que los resultados sean números naturales.

Para poder indicar que a una cierta cantidad “se le va a quitar” otra cantidad se introduce una nueva operación que se denomina Sustracción o Resta. Sin embargo se tiene que esta operación no se puede definir en los números naturales, debido a que hay ocasiones en que el resultado de una resta no es un número natural. Por ejemplo, si a 8 le restamos 8 nos quedamos sin “nada”. A este “nada” se le denota con el símbolo 0, el número cero, el cual no es un número natural. De igual forma, si a 3 le restamos 9 nos da un resultado que no está en los números naturales. Entonces se hace necesario introducir otro conjunto de números en el cual se pueda definir la operación de resta.

Números Enteros.
*El conjunto de los **Números enteros** se denota con el símbolo **Z** y se define en la forma:*

$$\boldsymbol{Z}=\{\ldots-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$$

Esto es, el conjunto de los números enteros contiene a todos los números naturales. Se observa que cada número natural tiene un compañero que se denomina Inverso aditivo, y esta representado por el número natural correspondiente antecedido de un signo negativo. Esto es, el inverso aditivo del número natural 3 es el número -3. Además se tiene un nuevo número, un número muy especial, que se denota por 0 y se denomina Neutro aditivo.
Las operaciones definidas en este conjunto son Suma, Multiplicación y Resta.
¡Ya es posible efectuar operaciones del tipo $5-9$!

Se debe de observar que al igual que la multiplicación, la resta es una operación que se obtiene a partir de la suma. Esto se debe a que la operación de resta se define en términos de los inversos aditivos, considerando ciertas reglas de signos. Dos signos consecutivos iguales da como resultado un signo positivo $(+)(+)=(+)$ ó $(-)(-)=(+)$, mientras que dos signos contrarios consecutivos da como resultado un signo negativo $(+)(-)=(-)$ ó $(-)(+)=(-)$. Esto es,

$$5+(-9)=5-9=-4$$

Al número 5 se le suma el inverso aditivo del número 9 y se obtiene como resultado el inverso aditivo del número 4. Esto es, se realizo una resta. ¡La suma se transformo en una resta!.

Hay ocasiones en que se necesita determinar cuantas veces está contenido un número en otro. Por ejemplo, el 3 esta contenido 7 veces en el número 21. Para determinar el número 7 se necesita otra operación a la cual se le denomina División.
La División necesita la existencia de otro tipo de números que no están contenidos en los números enteros. Esto es, se puede dividir 8 entre 4 y obtener 2, el cual es un número entero, ya que $2\times 4=8$*, sin embargo no es posible hallar el resultado de dividir 4 entre 8. No hay ningún número entero que multiplicado por 8 de cómo resultado 4. Entonces, se necesitan más números.*

Números Racionales.
*El conjunto de los números **Racionales** se denota por **Q** y se define como el conjunto de todos los números que se pueden escribir como el cociente de dos números enteros, donde el denominador necesariamente es distinto de cero.*

$$\boldsymbol{Q}=\left\{z \mid z=\frac{p}{q};\ p,q\in Z,\ q\neq 0\right\}$$

Entonces, el conjunto de los Números racionales contiene a todas las fracciones.
Al definir al conjunto de los Números racionales se introduce un nuevo tipo de número que se denomina inverso multiplicativo. Esto es, a cada número entero se le asigna un nuevo número, de tal forma que si se multiplican entre si se obtiene el número 1. A esta propiedad se le denomina propiedad del inverso multiplicativo, y al número 1 se le denomina Elemento Neutro multiplicativo.
Por ejemplo, el inverso multiplicativo del número entero 7 es el número racional $1/7$ *ya que al multiplicarlos se obtiene el Neutro multiplicativo 1.*
Al combinar los números enteros con los inversos multiplicativos se obtienen las fracciones. Por ejemplo el $6/7$ *se define de la siguiente forma:*

$$6\times\frac{1}{7}=\frac{6}{7}$$

Entonces, ya se tienen definidas las cuatro operaciones elementales de la Aritmética.

Números Irracionales.
Sin embargo hacen falta números. Hay una gran variedad de números que no se pueden escribir como el cociente de números enteros. Por ejemplo los números $\pi, e, \sqrt{2}, \sqrt{5}, \ln(1), \text{etc}$. *A todos éstos números se les agrupa en un conjunto especial que se denomina Conjunto de los Números **Irracionales**. Este conjunto se denota por el símbolo **I**, y se define en la forma*

$$\boldsymbol{I}=\left\{w \mid w\neq\frac{p}{q};\ p,q\in Z,\ q\neq 0\right\}$$

Se puede observar que el conjunto de los números Racionales contiene a los números enteros y naturales y que los números racionales y los irracionales no tienen números en común.

Números Reales.

*Combinando estos dos conjuntos de números se obtiene un conjunto más general denominado conjunto de los **Números reales**. Este conjunto se define como la unión de los números Racionales e Irracionales, en la forma:*

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{Q} \cup \boldsymbol{I}$$

Además se satisface la relación de contención:

$$\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q}$$

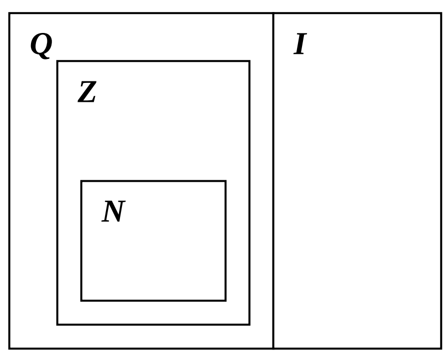
Y la condición que garantiza que los números racionales y los irracionales no tienen elementos en común:

$$\boldsymbol{Q} \cap \boldsymbol{I} = \Phi$$

donde Φ denota al conjunto vacío.

El conjunto de los Números Reales tiene la estructura siguiente:

R



*El Conjunto de los Números Reales **R** es una estructura especial de un tipo particular de Objetos matemáticos denominados **Campos**. Un Campo se define en términos de un conjunto de axiomas que satisfacen dos operaciones denominadas "adición" o suma y "producto" o multiplicación. Los Números reales satisfacen los axiomas de Campo al considerar sus operaciones de suma $(+)$ y multiplicación $(\cdot)$ Dichos axiomas son los siguientes.*

1. *Axioma de cerradura para la suma.*

$$\forall a, b \in \boldsymbol{R},\; a + b \in \boldsymbol{R}$$

Este axioma indica que la suma de dos números reales es igual a un número real.

2. *Axioma de la propiedad conmutativa en la suma.*

$$\forall a, b \in \boldsymbol{R},\; a + b = b + a$$

Este axioma indica que el orden en que se realiza la suma de dos números reales no altera el resultado.
Esto es, el orden de los sumando no altera la suma.

3. Axioma de la propiedad asociativa en la suma.

$$\forall a,b,c \in \mathbf{R},\ a+(b+c)=(a+b)+c$$

Este axioma indica que al realizar la suma de varios números reales la operación es binaria, se realiza con dos números, y no importa el orden en que se efectúen las operaciones consecutivas.

4. Axioma del elemento Neutro aditivo.

$$\exists 0 \in \mathbf{R} \ni \forall a \in \mathbf{R},\ a+0=0+a=0$$

Este axioma indica que existe un número denominado “cero” de tal forma que si se suma con cualquier número real, siempre se obtiene como resultado dicho número real.

5. Axioma del elemento Inverso aditivo.

$$\forall a \in \mathbf{R},\ \exists! b \in \mathbf{R} \ni a+b=0$$

El axioma indica que para cualquier número real a hay un número b tal que si se suman ambos da como resultado “cero”. Al número b se le acostumbra denotar por $-a$.

6. Axioma de Cerradura para la multiplicación.

$$\forall a,b \in \mathbf{R},\ a \cdot b \in \mathbf{R}$$

El axioma indica que si se multiplican dos números reales el resultado siempre será un número real.

7. Axioma de la propiedad Asociativa en la multiplicación.

$$\forall a,b,c \in \mathbf{R},\ a \cdot (b \cdot c)=(a \cdot b) \cdot c$$

El axioma indica que la multiplicación es una operación binaria, se realiza entre parejas de números, la cual se puede realizar en cualquier orden.

8. Axioma de la propiedad conmutativa en la multiplicación.

$$\forall a,b \in \mathbf{R},\ a \cdot b=b \cdot a$$

El axioma indica que no importa el orden en que se efectúe una multiplicación, el resultado es el mismo. Esto es, el orden de los factores no altera el producto.

9. Axioma de la propiedad Distributiva.
   a. $\forall a,b,c \in \mathbf{R},\ a \cdot (b+c)=a \cdot b+a \cdot c$
   b. $\forall a,b,c \in \mathbf{R},\ (a+b) \cdot c=a \cdot c+b \cdot c$

Este axioma indica la forma en que se combinan las operaciones de suma y multiplicación.

10. Axioma del elemento Neutro multiplicativo.

$$\exists 1 \in \mathbf{R} \ni \forall a \in \mathbf{R},\ a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

El axioma indica que hay un único número denotado por 1, de tal forma que si se multiplica con cualquier otro número real siempre se obtendrá como resultado el mismo número escogido.

El conjunto de los Números Reales es el conjunto base del Cálculo de Funciones reales de Variable real que son de interés en la Ingeniería.
De esta manera, necesitamos determinar todas las posibles formas en que se pueden manipular los números reales. Esto es, introducir operaciones más generales. Esto forma parte del Álgebra de los números reales.

ARITMETICA

Propiedades de las operaciones básicas.
Las operaciones básicas definidas en el conjunto de los números reales tienen ciertas propiedades y un de ellas es la prioridad que tiene una operación con respecto a otra.
Esto es, si se combina una suma o resta con una multiplicación o división, cual operación se realiza primero.

En los dos ejemplos siguientes se escribe la misma operación, pero se efectúa de distinta forma ¿Cual de las dos operaciones es correcta?

a) $3-3\times 4 = 0\times 4 = 0$
b) $3-3\times 4 = 3-12 = -9$

a) $\dfrac{4+8}{4} = \dfrac{12}{4} = 3$
b) $\dfrac{4+8}{4} = 1+8 = 9$

Se pueden cometer errores si no se tienen ciertas reglas generales.
Para evaluar una operación aritmética se pueden considerar las siguientes reglas. Los paréntesis indican la prioridad de una operación. La operación entre paréntesis es la primera operación a efectuar. Sin embargo los paréntesis solo son necesarios cuando se combinan sumas o restas con otras operaciones.
En la operación $(2-5)\times 7$ *los paréntesis indican que se debe de evaluar primero la resta dentro de los paréntesis y posteriormente la multiplicación.*

$$(2-5)\times 7 = -3\times 7 = -21$$

En la operación $2-5\times 7$ *se puede observar que no existe ningún paréntesis por lo que se debe de efectuar primero la multiplicación y posteriormente la resta.*

$$2-5\times 7 = 2-35 = -33$$

Cuando se combinan sumas y restas con divisiones, la "raya" del quebrado se considera como un paréntesis. Esto se observa con más detalle al escribir un cociente usando el símbolo $(/)$. Este símbolo indica que el numerador y el denominador deben de estar contenidos en paréntesis.
De esta forma, consideremos la operación

$$\frac{3+7}{9-4}=(3+7)/(9-4)$$

La raya principal del quebrado determina que se deben de realizar la suma del numerador y

la resta del denominador antes de realizar la división.

$$\frac{3+7}{9-4}=\frac{10}{5}=2$$

No es posible efectuar primero las "divisiones", aplicar reglas de signos y hacer la resta al final.
Esto es, no es posible dividir primero 3 entre 9, 7 entre 4, aplicar reglas de signos, más entre menos igual a menos, y despues restar los resultados.

$$\frac{3+7}{9-4}\neq\frac{3}{9}-\frac{7}{4}$$

Observar que las siguientes no son las mismas operaciones, aunque en todas estén involucrados los mismos números y signos.

$$9+\frac{7}{9}\neq\frac{9+7}{9}\neq\frac{9}{9}+7$$

Ejemplos.

1. $4\times 2-\frac{3+7}{9-4}=8-\frac{10}{5}=8-2=6$

2. $3\times(8-3)-3=3\times 5-3=15-3=12$

3. $\dfrac{4+\frac{9}{3}}{\frac{3-10}{4-3}}+5\times(3-3\times(4-2)) = \dfrac{4+3}{\frac{-7}{1}}+5\times(3-3\times(2)) = \dfrac{7}{-7}+5\times(3-6)$

$$=-1+5\times(-3)=-1-15=-16$$

Operaciones con fracciones.

Uno de los problemas básicos en la aritmética es la manipulación de las operaciones básicas con números fraccionarios. Estamos pensando en operaciones para las cuales no es necesario utilizar una calculadora. Incluso hay ocasiones en que aún con calculadora se cometen errores al realizar operaciones con fracciones.

Las operaciones de suma y resta de fracciones tienen la misma estructura. La diferencia solo radica en que si se deben de sumar o restar ciertos resultados. La operación en sí se puede efectuar de la siguiente forma.

Si se tienen dos fracciones cualesquiera que hay que sumar o restar se multiplica en forma cruzada el numerador de la primera por el denominador de la segunda y se le resta , dependiendo de la operación, la multiplicación cruzada del denominador de la primera por el numerador de la segunda. El resultado se divide entre la multiplicación de los denominadores de ambas fracciones. Una vez efectuada la operación se simplifica el resultado hasta la mínima expresión posible. Esto es:

Suma

La suma de dos fracciones se realiza al multiplicar en forma cruzada el numerador de la primera por el denominador de la segunda y sumar la multiplicación cruzada del denominador de la primera por el numerador de la segunda.

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}$$

Ejemplos.

1. $\frac{4}{3}+\frac{2}{5}=\frac{4\times 5+3\times 2}{3\times 5}=\frac{20+6}{15}=\frac{26}{15}$

2, $-4+\frac{6}{7}=\frac{-4}{1}+\frac{6}{7}=\frac{(-4)\times 7+1\times 6}{1\times 7}=\frac{-28+6}{7}=-\frac{22}{7}$

Resta

La Resta de dos fracciones se realiza al multiplicar en forma cruzada el numerador de la primera por el denominador de la segunda y restar la multiplicación cruzada del denominador de la primera por el numerador de la segunda.

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d}$$

Ejemplos.

1. $\frac{5}{8}-\frac{3}{7}=\frac{5\times 7-8\times 3}{8\times 7}=\frac{35-24}{56}=\frac{11}{56}$

2. $\frac{-2}{5}-\frac{4}{3}=\frac{-2\times3-5\times4}{5\times3}=\frac{-6-20}{15}=\frac{-26}{15}$

Cuando se suman o restan fracciones que son positivas y negativas a la vez se puede seguir el criterio siguiente. Si la primera fracción es negativa, el signo negativo se le asigna al numerador, y se considera como positivo el denominador. Esto es:

$$-\frac{9}{5}=\frac{-9}{5}$$

Ejemplos.

1. $-\frac{9}{2}-\frac{6}{5}=\frac{-9}{2}-\frac{6}{5}=\frac{(-9)\times5-2\times6}{2\times5}=\frac{-45-12}{10}=\frac{-57}{10}=-\frac{57}{10}$

2. $-\frac{4}{3}+\frac{7}{2}=\frac{-4}{3}+\frac{7}{2}=\frac{(-4)\times2+3\times7}{3\times2}=\frac{-8+21}{6}=\frac{13}{6}$

Cuando se suma o resta un antero con una fracción el proceso es simple. Se multiplica el denominador de la fracción por el entero y se le suma o resta el numerador de la fracción. El resultado se divide entre el denominador de la fracción.

1. $-5+\frac{8}{3}=\frac{(-5)\times3+8}{3}=\frac{-15+8}{3}=-\frac{7}{3}$

2. $-\frac{9}{2}-5=\frac{-9}{2}-5=\frac{2\times(-5)-9}{2}=\frac{-10-9}{2}=-\frac{19}{2}$

Multiplicación

Si se considera la multiplicación de dos fracciones se multiplican en forma directa los numeradores y los denominadores. Esto es, se multiplican los dos numeradores y se divide entre la multiplicación de los dos denominadores.

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$

Ejemplos.

1. $-\frac{4}{3}\times\frac{7}{2}=\frac{-4}{3}\times\frac{7}{2}=\frac{(-4)\times7}{3\times2}=\frac{-28}{6}=-\frac{14}{3}$

2. $\frac{-7}{4}\times\frac{-5}{3}=\frac{(-7)\times(-5)}{4\times3}=\frac{35}{12}$

3. $7\times\frac{6}{5}=\frac{7}{1}\times\frac{6}{5}=\frac{42}{5}$

División

La división de dos fracciones se puede presentar en dos formas equivalentes. Y el proceso de división es cuestión de cómo se multiplican los elementos de las fracciones.
Si la división de dos fracciones se presenta utilizando el símbolo ($\div$)

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$$

Se multiplica en forma cruzada el numerador de la primera por el denominador de la segunda y el resultado, que es un numerador, se divide entre la multiplicación del denominador de la primera por el numerador de la segunda.

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \times d}{b \times c}$$

Ejemplos.

1. $\frac{3}{5} \div \frac{7}{8} = \frac{3 \times 8}{5 \times 7} = \frac{24}{35}$

2. $\frac{-2}{3} \div \frac{-6}{5} = \frac{(-2) \times 5}{3 \times (-6)} = \frac{-10}{-18} = \frac{5}{9}$

3. $7 \div \frac{6}{3} = \frac{7}{1} \div \frac{6}{3} = \frac{7 \times 3}{1 \times 6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$

Si la división de dos fracciones se presenta en términos de la "raya principal del quebrado", se multiplican los extremos y el resultado queda como un numerador, mientras que se multiplican los medios y el resultado queda como un denominador.

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

En términos de la raya principal del quebrado, la multiplicación de los extremos queda "arriba", y la multiplicación de los de en medio queda "abajo".

Ejemplos.

1. $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{9}{-5}} = \frac{3 \times (-5)}{4 \times 9} = \frac{-15}{36} = -\frac{5}{12}$

2. $\dfrac{\frac{7}{2}}{4}=\dfrac{\frac{7}{2}}{\frac{4}{1}}=\dfrac{7\times 1}{2\times 4}=\dfrac{7}{8}$

3. $\dfrac{9}{\frac{7}{2}}=\dfrac{\frac{9}{1}}{\frac{7}{2}}=\dfrac{9\times 2}{1\times 7}=\dfrac{18}{7}$

A continuación se describen con detalle varios ejemplos en los cuales se utilizan todas las propiedades de las operaciones básicas.

Ejemplos.

1. $$\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+1}}}}=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\frac{1}{2}}}}=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\frac{3}{2}}}}=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\frac{2}{3}}}=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\frac{5}{3}}}=\dfrac{1}{1+\frac{3}{5}}=\dfrac{1}{\frac{8}{5}}=\dfrac{5}{8}$$

2. $$3-4(5-7(6+8(3-1)-4)+1)=3-4(5-7(6+8(2)-4)+1)=3-4(5-7(6+16-4)+1)$$
$$=3-4(5-7(18)+1)=3-4(5-126+1)=3-4(-120)=3+480=483$$

3. $$\dfrac{\frac{3}{4}-\frac{1}{5}}{3+\frac{7}{4}}+\dfrac{\frac{5}{3}+2}{7-\frac{2}{5}}=\dfrac{\frac{15-4}{20}}{\frac{12+7}{4}}+\dfrac{\frac{5+6}{3}}{\frac{35-2}{5}}=\dfrac{\frac{11}{20}}{\frac{19}{4}}+\dfrac{\frac{11}{3}}{\frac{33}{5}}$$
$$=\dfrac{4\times 11}{20\times 19}+\dfrac{5\times 11}{3\times 33}=\dfrac{44}{380}+\dfrac{55}{99}=\dfrac{44\times 99+380\times 55}{380\times 99}=\dfrac{4356+20900}{37620}=\dfrac{25256}{37620}=\dfrac{574}{855}$$

4. $$5-5(5-5(3-1)+10(3-3(5-2)))=5-5(5-5(2)+10(3-3(3)))$$
$$=5-5(5-10+10(3-9))=5-5(-5+10(-6))=5-5(-5-60)$$
$$=5-5(-65)=5+325=330$$

5. $$7\left(\frac{5}{2}-\frac{4}{3}\right)+\frac{5}{2}\left(\frac{3}{2}-2\right)-\dfrac{\frac{2}{3}-\frac{1}{5}}{\frac{3}{4}}=7\left(\frac{15-8}{6}\right)+\frac{5}{2}\left(\frac{3-4}{2}\right)-\dfrac{\frac{10-3}{15}}{\frac{3}{4}}=7\left(\frac{7}{6}\right)+\frac{5}{2}\left(\frac{-1}{2}\right)-\dfrac{\frac{7}{15}}{\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{49}{6}+\frac{-5}{4}-\frac{28}{45}=\frac{196-30}{24}-\frac{28}{45}=\frac{166}{24}-\frac{28}{45}=\frac{83}{12}-\frac{28}{45}=\frac{3735-336}{540}=\frac{3399}{540}=\frac{1133}{180}$$

EJERCICIOS

Recuerda que lo que deseamos ejercitar es la forma en que se manipulan las operaciones aritméticas no el uso de la calculadora. Ya abra oportunidad de usarla.

1. $-4(-7+2(4-7)-8(5-7))$

2. $(8-4(8-5))\left(\frac{3}{2}-1\right)+1$

3. $\frac{2}{7}+5\left(\frac{5}{2}-\frac{1}{4}\right)+\frac{2}{3}$

4. $\frac{2}{7}+\frac{4}{3}\left(\frac{3}{2}-5\right)\left(\frac{4}{5}-\frac{1}{3}\times\frac{4}{5}\right)-5$

5. $\dfrac{\frac{1}{2}+1}{2-\frac{1}{3}}-\dfrac{3+\frac{1}{5}}{\frac{3}{4}}$

6. $\dfrac{-\frac{2}{3}-2}{-\frac{2}{3}-3}+5$

7. $3-2\times(4-5\times(7-2))$

8. $3-5\times(3-5\times(3-5)\times3-5)\times3-5$

9. $-4(-7(4-9)-8(5-6))$

9. $(7+4(8-5))\left(\frac{3}{2}-1\right)+1$

11. $\dfrac{2}{2+\dfrac{2}{2+\frac{1}{2}}}+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\frac{1}{2}}}$

12. $\dfrac{\frac{7}{5}-3}{\left(-\frac{7}{2}-2\right)\frac{2}{3}}-\dfrac{\frac{3}{2}-4}{5-\frac{2}{3}}$

13. $\dfrac{\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{4}{3}-\frac{2}{5}\right)}{\left(\frac{5}{2}-\frac{1}{3}\right)}+\frac{2}{3}\left(\frac{4}{7}-\frac{1}{3}\right)$

14. $\dfrac{(7+4(8-5))\left(\frac{3}{2}-1\right)+1}{\dfrac{\frac{3}{2}-4}{5-\frac{2}{3}}+3}$

15. $\dfrac{(8-4(8-5))\left(\dfrac{3}{2}-1\right)+1}{\dfrac{2}{7}+5\left(\dfrac{5}{2}-\dfrac{1}{4}\right)+\dfrac{2}{3}}$ *16.*

$$\left(\frac{(8-4(7-5))\left(\dfrac{3}{2}+1\right)-1}{\dfrac{3}{7}+5\left(\dfrac{5}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\dfrac{2}{5}}\right)-\left(\frac{2}{5}-1\right)\left(\frac{4}{3}-\frac{2}{4}\times\frac{4}{5}\right)$$

POTENCIACIÓN Y RADICACIÓN

POTENCIACION

Es posible que sea necesario efectuar la multiplicación de un número real consigo mismo un cierto número de veces, por ejemplo multiplicar el número 3 consigo mismo 19 veces. Esta operación se escribe en la forma:

$$3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3.$$

Aparte del posible resultado, interesa buscar formas de cómo trabajar con estas expresiones. El manipular expresiones de este tipo es bastante tedioso. Imaginemos escribir la multiplicación del número tres consigo mismo 99 veces. Seria inútil escribir tal operación. Pero es posible definir alguna expresión u operación que represente la multiplicación repetida. De esta forma, para simplificar la multiplicación repetida, introducimos una nueva notación.

$$3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3=3^{20}$$

Esto es, en la expresión 3^{20} *el número 3 es la cantidad que se está multiplicando consigo mismo misma, y el numerito 20 representa el número de veces que el número 3 aparece en la multiplicación repetida. De esta forma, la nueva notación introduce una nueva operación que se denomina potenciación.*

***<u>Definición</u>**: Sea a una cantidad arbitraria, y n un número entero positivo. Se define la operación de potenciación, como la multiplicación repetida de la cantidad a consigo misma n-1 veces. Esta operación se representa por la expresión* a^n *.*

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a \cdot a}_{n\ veces}$$

Esto es, la multiplicación de una cantidad a consigo misma, de tal forma que la cantidad a aparece n veces en la multiplicación se representa por el nuevo símbolo a^n *.*

A la cantidad a se le denomina base, y es el número o la cantidad que se multiplica consigo mismo, y al número n se le denomina potencia, el número de veces que el número o cantidad a aparece en la multiplicación repetida.
De esta forma se puede decir que:

$$a^5 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$$
$$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$$

Es necesario remarcar el hecho de que a es una cantidad arbitraria, pero que la potencia n es necesariamente un número entero positivo.

PROPIEDADES

La operación de potenciación puede combinarse en diversas formas. Estas pueden ser:

$$\frac{(a^4 b^5)^4 a^6}{((a^4)^2 b)^3} \; ; \; (a^3 b^5)^4 a^5 ((a^4 b)^2 b)^7$$

Lo que se desea hacer es poder escribir un término en el cual cada base este afectada de una única potencia. A este proceso le llamaremos simplificación. Para esto se necesita determinar la forma en que se pueden manipular las potencias cuando hay varias bases. Necesitamos propiedades.

A continuación se describen las propiedades que satisfacen las potencias al combinarse varias bases afectadas de diversas potencias.

Producto de bases iguales*.*
Cuando dos bases iguales se multiplican entre sí, el resultado es igual a la misma base afectada de una potencia que es igual a la suma de las potencias de las bases.

$$a^n a^m = a^{n+m}$$

En un lenguaje informal, si dos bases iguales se multiplican las potencias se suman.

Demostración: *Consideremos el producto de dos bases iguales con potencias arbitrarias. Utilizando la definición de la potenciación se desarrolla cada expresión y se reagrupan los términos elementales.*

$$a^n \cdot a^m = \underbrace{(a \cdot a \cdots a \cdot a)}_{n\,veces\,a} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdots a \cdot a)}_{m\,veces\,a} = \underbrace{a \cdot a \cdots a \cdot a}_{n\,veces\,a} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdots a \cdot a}_{m\,veces\,a} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a \cdot a \cdot a}_{(n+m)\,veces\,a} = a^{n+m}$$

Ejemplos

1. $a^2 \cdot a^4 = \underbrace{(a \cdot a)}_{2\,veces} \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot a)}_{4\,veces} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}_{6\,veces} = a^6 = a^{2+4}$

2. $a^3 a^2 a^4 a^7 = a^{3+2+4+7} = a^{16}$

Entonces, cuando se multiplican bases iguales todas las potencias se multiplican.

Cociente de bases iguales.

Cuando dos bases iguales se dividen entre sí, se obtiene como resultado la misma base con una potencia que es igual a la resta de la potencia del numerador menos la potencia del denominador.

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

En un lenguaje informal, si dos bases iguales se dividen entre sí, a la potencia de "arriba" se le resta la potencia de "abajo".

$$\frac{a^6}{a^2} = a^{6-2} = a^4 \ ; \quad \frac{a^3}{a^7} = a^{3-7} = a^{-4}$$

Se puede observar que es posible obtener un "potencia" ¡negativa!. Para resolver este problemita se puede decir que al dividir dos bases iguales, a la potencia mayor se le resta la potencia menor y el resultado es la potencia de la misma base, la cual queda en la posición que tiene el término con la potencia mayor. Esto garantiza que la base quede afectada de una potencia (número entero positivo).

La potencia mayor está en el numerador, por lo que el resultado queda en el numerador.

$$\frac{a^5}{a^2} = a^{5-2} = a^3$$

La potencia mayor está en el denominador, por lo que el resultado queda en el denominador.

$$\frac{a^3}{a^7} = \frac{1}{a^{7-3}} = \frac{1}{a^4}$$

Demostración: *En ambos casos se utiliza el hecho de que la división de dos cantidades iguales, distintas de cero, es 1. Eso es, las cantidades se "cancelan". Entonces, al realizar la demostración "vamos cancelando" las bases a.*

*Si n es **mayor** que m:*

$$\frac{a^n}{a^m} = \frac{\overbrace{a\cdot a\cdots a\cdot a}^{n\ veces\ a}}{\underbrace{a\cdot a\cdots a\cdot a}_{m\ veces\ a}} = \frac{\overbrace{a\cdot a\cdots a\cdot a}^{(n-1)\ veces\ a}}{\underbrace{a\cdot a\cdots a\cdot a}_{(m-1)\ veces\ a}} = \frac{\overbrace{a\cdot a\cdots a\cdot a}^{(n-2)\ veces\ a}}{\underbrace{a\cdot a\cdots a\cdot a}_{(m-2)\ veces\ a}} = \cdots = \overbrace{a\cdot a\cdots a\cdot a}^{(n-m)\ veces\ a}$$

Ejemplo

$$\frac{a^5}{a^3} = \frac{a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a}{a\cdot a\cdot a} = \frac{a\cdot a\cdot a\cdot a}{a\cdot a} = \frac{a\cdot a\cdot a}{a} = \frac{a\cdot a}{1} = a\cdot a = a^2 = a^{5-3}$$

*Si n es **menor** que m:*

$$\frac{a^n}{a^m} = \frac{\overbrace{a\cdot a\cdots a\cdot a}^{n\ veces\ a}}{\underbrace{a\cdot a\cdots a\cdot a}_{m\ veces\ a}} = \frac{\overbrace{a\cdot a\cdots a\cdot a}^{(n-1)\ veces\ a}}{\underbrace{a\cdot a\cdots a\cdot a}_{(m-1)\ veces\ a}} = \frac{\overbrace{a\cdot a\cdots a\cdot a}^{(n-2)\ veces\ a}}{\underbrace{a\cdot a\cdots a\cdot a}_{(m-2)\ veces\ a}} = \cdots = \frac{1}{\overbrace{a\cdot a\cdots a\cdot a}^{(m-n)\ veces\ a}}$$

Ejemplo

$$\frac{a^3}{a^5}=\frac{a\cdot a\cdot a}{a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a}=\frac{a\cdot a}{a\cdot a\cdot a\cdot a}=\frac{a}{a\cdot a\cdot a}=\frac{1}{a\cdot a}=\frac{1}{a^2}=\frac{1}{a^{5-3}}$$

Base elevada a potencias consecutivas.

Si una base se eleva a dos potencias consecutivas, el resultado es igual a la misma base y su potencia es igual a la multiplicación de las potencias consecutivas.

$$(a^n)^m = a^{n\cdot m}$$

Esto es, cuando una base se eleva a dos potencias consecutivas, las potencias se multiplican.

Demostración: *Utilizamos la propiedad de la multiplicación de bases iguales, donde la base es* a^n.

$$(a^n)^m = \underbrace{a^n\cdot a^n\cdots a^n\cdot a^n}_{m\,veces} = a^{\overbrace{n+n+\cdots+n}^{}}_{}$$

Se puede generalizar esta propiedad para cualquier número finito de potencias consecutivas.

$$(((a^n)^m)^r\ldots)^s = a^{n\cdot m\cdot r\cdot\ldots\cdot s}$$

Ejemplos

1. $(a^2)^3 = \underbrace{a^2\cdot a^2\cdot a^2}_{3\,veces} = a^{2+2+2} = a^6 = a^{3\cdot 2}$

2. $((a^2)^3)^4 = (a^2\cdot a^2\cdot a^2)^4 = (a^{2+2+2})^4 = (a^6)^4 = a^6\cdot a^6\cdot a^6\cdot a^6 = a^{6+6+6+6} = a^{6\cdot 4} = a^{2\cdot 3\cdot 4}$

Producto de bases distintas.

Cuando se multiplican dos bases distintas no se puede simplificar la expresión, (de alguna forma simple), de tal manera que la expresión mantiene su forma:

$$a^n b^m = a^n b^m$$

Existe un caso importante en el cual es posible re escribir la expresión. Si se multiplican dos bases distintas pero con la misma potencia se puede re escribir la expresión en la forma:

$$a^n b^n = (ab)^n$$

Se multiplican las bases, y la multiplicación queda afectada por la misma potencia. Se podría decir que la potencia "sale", y queda como una potencia común.

Demostración: *se utiliza la definición de potenciación y el reagrupamiento de las bases.*

$$a^n \cdot b^n = (\underbrace{a \cdot a \cdots a \cdot a}_{n\,veces}) \cdot (\underbrace{b \cdot b \cdots b \cdot b}_{n\,veces}) = \underbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdots (a \cdot b) \cdot (a \cdot b)}_{n\,veces} = (ab)^n$$

Ejemplo

$$a^4 \cdot b^4 = (\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a}_{4\,veces}) \cdot (\underbrace{b \cdot b \cdot b \cdot b}_{4\,veces}) = \underbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot (a \cdot b)}_{4\,veces} = (ab)^4$$

Cociente de bases distintas.

De igual forma que el producto de bases distintas, si se dividen dos bases distintas, no es posible simplificar la expresión en una forma simple, por lo que la expresión mantiene su forma.

$$\frac{a^n}{b^m} = \frac{a^n}{b^m}$$

En el caso especial en que las potencias sean iguales, es posible re escribir la expresión en la forma:

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Esto es, las bases se dividen, y la potencia "sale" como una potencia común.

$$\frac{a^n}{b^n} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdots a \cdot a}^{n\,veces\,a}}{\underbrace{b \cdot b \cdots b \cdot b}_{n\,veces\,a}} = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdots \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b}}_{n\,veces\,a} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Ejemplo

$$\frac{a^5}{b^5} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}^{5\,veces\,a}}{\underbrace{b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b}_{5\,veces\,a}} = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b}}_{5\,veces\,a} = \left(\frac{a}{b}\right)^5$$

Propiedad distributiva

Las propiedades de la multiplicación y división de bases distintas con potencias iguales, se pueden reformular y definir las propiedades distributivas de la potenciación.

Para a y b dos bases arbitrarias y n un número entero positivo, se tienen las propiedades

$$(ab)^n = a^n b^n \quad ; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Esta propiedad describe la forma en que pueden ser eliminados los paréntesis al manejar potencias.

Demostración: *Se utiliza la definición de potenciación y el reagrupamiento de términos.*

Para el producto:

$$(a\cdot b)^n = \underbrace{(a\cdot b)\cdot(a\cdot b)\cdots(a\cdot b)\cdot(a\cdot b)}_{n\ veces} = a\cdot b\cdot a\cdot b\cdots a\cdot b\cdot a\cdot b = (\underbrace{a\cdot a\cdots a\cdot a}_{n\ veces})\cdot(\underbrace{b\cdot b\cdots b\cdot b}_{n\ veces}) = a^n b^n$$

Para el cociente:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\left(\frac{a}{b}\right)\cdot\left(\frac{a}{b}\right)\cdots\left(\frac{a}{b}\right)\cdot\left(\frac{a}{b}\right)}_{n\ veces} = \frac{\underbrace{a\cdot a\cdots a\cdot a}_{n\ veces}}{\underbrace{b\cdot b\cdots b\cdot b}_{n\ veces}} = \frac{a^n}{b^n}$$

Entonces, la potencia n "entra" y afecta a cada uno de los términos. Si estos términos son bases con potencias, se aplica la propiedad distributiva y posteriormente la propiedad de potencias consecutiva.

Ejemplos

1. $(a^4b^5)^4 = (a^4)^4(b^5)^4 = a^{4\times4}b^{5\times4} = a^{16}b^{20}$

2. $\left(\frac{a^3}{b^2}\right)^4 = \frac{(a^3)^4}{(b^2)^4} = \frac{a^{3\times4}}{b^{2\times4}} = \frac{a^{12}}{b^8}$

Vemos que se puede decir que la propiedad distributiva de las potencias indica como se distribuye una potencia común en un producto o un cociente. La potencia "entra" y "multiplica" a ***todas*** *las potencias que encuentra, que no estén agrupadas en otra potencia común.*

Ejemplo

$$\left(\frac{a^3(c^2d)^5}{(b^2m^4)^2}\right)^4 = \frac{(a^3)^4((c^2d)^5)^3}{((b^2m^4)^2)^4} = \frac{a^{12}(c^2d)^{15}}{(b^2m^4)^8}$$

Los términos c^2d *y* b^2m^4 *están agrupados en otras potencias. Están dentro de otro paréntesis. Entonces la potencia 4 solo afecta a las potencias externas de los paréntesis internos. Posteriormente se vuelve a aplicar la propiedad distributiva.*

$$\left(\frac{a^3(c^2d)^5}{(b^2m^4)^2}\right)^4 = \frac{(a^3)^4((c^2d)^5)^3}{((b^2m^4)^2)^4} = \frac{a^{12}(c^2d)^{15}}{(b^2m^4)^8} = \frac{a^{12}c^{30}d^{15}}{b^{16}m^{32}}$$

Se obtiene al fin la expresión simplificada al máximo.

Generalización del concepto de Potencia

Es posible que existan expresiones en las cuales la "potencia" no es un número entero positivo. Considerando la propiedad del inverso multiplicativo de los números reales se pueden introducir "potencias" ¡negativas!.

La propiedad del inverso multiplicativo para los números reales establece que para cualquier número real hay otro número real, de tal forma que si se multiplican el resultado es la unidad.

Propiedad del inverso multiplicativo.
Para todo cantidad a, $a \neq 0$*, existe una única cantidad* $1/a$ *tal que se satisface la relación:*

$$a \cdot \frac{1}{a} = 1$$

A la cantidad $1/a$ *se le denomina inverso multiplicativo de a y se denota por:*

$$\frac{1}{a} = a^{-1}$$

Si a un inverso multiplicativo se le aplica una potencia se tendrá:

$$\frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = (a^{-1})^n = a^{-1 \cdot n} = a^{-n}$$

De esta forma se introducen las "potencias negativas", definiendo:

$$\frac{1}{a^n} = a^{-n} \quad ; \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

El transformar potencias negativas a positivas consiste simplemente en invertir la expresión y cambiar el signo negativo a positivo.
En general, al "pasar" términos de numeradores a denominadores o viceversa, solo se tiene que cambiar el signo de las potencias.

$$a^{-5} = \frac{1}{a^5}\ ; \ \frac{b^{-2}}{a^{-4}} = \frac{a^4}{b^2}\ ; \ \frac{a^3}{b^{-7}} = a^3 \cdot b^7$$

RADICACIÓN

Toda operación posee una operación colateral, de tal forma que ambas operaciones se "eliminan" mutuamente. Esto es, para cada operación definida debe de existir su operación inversa.
Para esto podemos imaginar la situación siguiente: ¿Cuál es el número que elevado a la potencia 4 da como resultado 16?. Podemos responder rápidamente que el número es el 2, ya que $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$*.*
La pregunta se puede plantear de la siguiente forma:
¿Cual es el número a que satisface la relación $a^4 = 16$*?.*
Nos gustaría poder "eliminar" la potencia 4, y dejar el número a del lado derecho. Esto es, despejar a y re escribir la relación en la forma:

$$a = 16^m$$

Donde m es una "potencia generalizada" que aún no se ha determinado.
Entonces se puede decir que si se efectúa "alguna" operación al número 16, esta operación nos debería dar como resultado 2. Esto es. $(a^4)^m = (16)^m = 2$.
Como se desea que esta nueva operación sea la inversa de la potenciación, se requiere que se satisfaga la relación:

$$(a^4)^m = a^{4m} = a$$

Esto es, $4m = 1$*. De donde se obtiene que* $m = 1/4$.
Podemos decir entonces que $16^{1/4} = 2$ *ya que* $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$
De esta forma podemos introducir una operación que llamamos "Raíz cuarta de 16". Así, la operación buscada se denomina Radicación.

<u>Definición</u>: *Sea a una cantidad arbitraria y n un número entero positivo. Se define la operación de Radicación como la expresión* $a^{1/n}$, *la cual satisface la relación:*

$$a^{1/n} = b \text{ sí y solo sí } b^n = a$$

Se dice que $a^{1/n}$ *es la raíz n-ésima de a y al número* $1/n$ *se le denomina raíz ó radical.*
En ocasiones se acostumbra utilizar una notación alterna para la radicación la cual es:

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$$

Entonces: $\sqrt[5]{b} = b^{1/5}$, $x^{1/4} = \sqrt[4]{x}$ *, etc.*

De esta forma, las operaciones de potenciación y radicación son operaciones recíprocas o inversas. Esto es, una potencia n elimina a su raíz $1/n$ *ó viceversa, cuando se aplican consecutivamente.*

$$(a^n)^{1/n} = a \ ; \ (a^{1/n})^n = a$$

Equivalentemente se tiene.

$$\sqrt[n]{a^n} = a \ ; \ (\sqrt[n]{a})^n = a$$

Ejemplos

1. $(a^3)^{1/3} = a^{3/3} = a^1 = a$

2. $(\sqrt[5]{x})^5 = (x^{1/5})^5 = x^{5/5} = x^1 = x$

La existencia de radicales permite la combinación de potencias y radicales para obtener "potencias generalizadas".
Aplicando la propiedad de potencias consecutivas se tiene la forma de combinar una potencia con un radical.

$$(a^n)^{1/m} = a^{n/m} \quad ; \quad \sqrt[m]{a^n} = a^{n/m}$$

Ejemplos

1. $(a^3)^{1/4} = a^{3\times(1/4)} = a^{3/4}$
2. $\sqrt[5]{x^2} = (x^2)^{1/5} = x^{2/5}$
3. $(a^{1/4})^9 = a^{9/4}$
4. $(\sqrt[5]{x})^3 = (x^{1/5})^3 = x^{3/5}$

Esto muestra que si se aplican consecutivamente una potencia y un radical a una misma base, estas se multiplican, dando como resultado una "potencia ¡fraccionaria!".

$$(a^n)^{1/m} = (a^{1/m})^n = a^{n/m}$$
$$\sqrt[m]{a^n} = (\sqrt[m]{a})^n = a^{n/m}$$

Entonces, cuando una expresión esta afectada por una potencia fraccionaria n/m*, el numerador n corresponde a una potencia y el denominador m corresponde a un radical o una raíz.*

$$a^{9/4} = (a^9)^{1/4} = (a^{1/4})^9 = (\sqrt[4]{a})^9 = \sqrt[4]{a^9}$$

El 9 *es la potencia y el* $1/4$ *es la raíz cuarta.*

Cuando se ha combinado una potencia con un radical se obtienen expresiones del tipo $a^{2/3}$*, y cuando se consideran los inversos multiplicativos se tienen expresiones del tipo* x^{-4}*. Se puede observar entonces que es posible tener expresiones del tipo* a^n*, donde n puede ser cualquier número real:*

$$a^3,\ a^{1/5},\ a^{2/3},\ a^{-5},\ a^{-2/3}$$

En general, a la cantidad a se le denomina ***base*** *y al número* ***n*** *se le denomina exponente, el cual puede ser cualquier número real.*

***Ejemplos generales**.*

En los siguientes ejemplos se muestra la forma en que se utilizan las propiedades de los exponentes par simplificar términos algebraicos a su expresión más simple. Una base afectada de un único exponente.

1. $\left(k^5y^6\right)^3\left(k^{-2}y^3\right)^{-2} = k^{15}y^{18}k^4y^{-6} = k^{19}y^{12}$

2. $\left(\dfrac{x^{4m}y^{3n+1}}{y^{-2}x^5}\right)^2\left(\dfrac{x^{4m-2}y^{6n-2}}{(x^3y^2)^3x^{-1}}\right)^{-2} = \dfrac{x^{8m}y^{6n+2}}{y^{-4}x^{10}}\dfrac{x^{-8m+4}y^{-12n+4}}{(x^3y^2)^{-6}x^2} = \dfrac{x^{8m}y^{6n+2}}{y^{-4}x^{10}}\dfrac{x^{-8m+4}y^{-12n+4}}{x^{-18}y^{-12}x^2}$

$= \dfrac{x^{8m-8m+4}y^{6n+2-12n+4}}{y^{-4-12}x^{10-18+2}} = \dfrac{x^4y^{-6n+6}}{y^{-16}x^{-6}} = x^{4-(-6)}y^{-6n+6-(-16)} = x^{10}y^{-6n+22}$

3. $\left(\sqrt[6]{(a^{-2}z^4)^3az^{-2}}\,a^2z^{1/6}\right)^6\sqrt[4]{(a^4z^6)^2a^4} = \left(((a^{-2}z^4)^3az^{-2})^{1/6}\right)^6a^{12}z^{6/6}(a^8z^{12}a^4)^{1/4}$

$= (a^{-2}z^4)^3az^{-2}a^{12}za^2z^3a = a^{-6}z^{12}a^{16}z^2 = a^{10}z^{14}$

4. $\dfrac{((w^3y^6)^{1/3}(w^2y^{-2})^3)^2}{(w^{-2}y^5)^3(w^2y^{-3})^2} = \dfrac{(wy^2w^6y^{-6})^2}{w^{-6}y^{15}w^4y^{-6}} = \dfrac{(w^7y^{-4})^2}{w^{-2}y^9} = \dfrac{w^{14}y^{-8}}{w^{-2}y^9} = w^{16}y^{-17}$

EJERCICIOS

1. $\left(x^3y^2\right)^3\left(x^{-2}y^{-3}\right)^2$

2. $((((k^3y^2)^3k^2)^{-1}y^2)^4k^3y^{-1})^2$

3. $\sqrt[5]{(z^{-2}x^4)^3zx^{-2}}\sqrt[3]{(z^3x^6)^2}$

4. $\left(a^{-2}k^3\right)^4\sqrt{\left(a^4k^2\right)^3}\left(a^{-3}k^{-1}\right)^3\left(a^6k^{-3}\right)^{1/3}$

5. $\left(\dfrac{a^{3m}b^{2n+1}}{b^3a^2}\right)^2\left(\dfrac{a^{4m-2}b^{6n}}{(a^3b^2)^3}\right)^2$

6. $\dfrac{((p^3y^2)^{1/3}p^2y^{-2})^3}{(p^{-2}y^5)^3p^2y^{-3}}$

7. $((a^3b^2)^2a^3b^2)^{-2}(a^3b^2)^5$

8. $\left(\sqrt[7]{(z^{-2}x^4)^3zx^{-2}}\,z^2x^{1/7}\right)^7\sqrt[4]{(z^4x^6)^2}$

9. $(k^{3n+1}p^{5m-1})^{1/5}(k^{n/5})^2p^{-3m}$

10. $(((((a^3b^2)^{1/2}a)^2a)^3a)^4a)^{1/2}$

11. $\dfrac{\left(\dfrac{a^2b^3}{b^5a^3}\right)^{-2}}{\dfrac{(a^3b^2)^3}{(a^{-3}b^{-2})^2}}$

12. $\dfrac{(w^{-4/3}T^{2/3})^3(T^2w^{-2})^3}{(T^{1/2}w^{5/2})^2T^2w^{-3}}T^2(T^2w^{-2})^3$

13. $\left(\left(\dfrac{z^3a^2}{(b^{-2}z^4)^{1/2}}\right)^2\dfrac{(b^3a^{-2})^{-3}}{z^4}\right)^4\left(\dfrac{(b^2a^4)^3}{z^{-1}}\right)$

14. $\left(\dfrac{k^4y^{2n+2}}{p^{6n+4}}\right)^{1/2}\left(\dfrac{k^{1/3}p^{3n}}{y^{6n+9}}\right)^3\left(\dfrac{k^{1/2}p^n}{y^{n+1}}\right)^2$

15. $\dfrac{\left(\dfrac{(z^2x^3)^3}{y^2}\right)^2}{\dfrac{x^2y^{-1}}{z}}\dfrac{\left(\dfrac{x^2}{y}\right)^5}{\left(\dfrac{z^{-1}}{y^{-2}}\right)^2}$

ALGEBRA

El Álgebra se puede entender como la generalización de las propiedades y operaciones del conjunto de los números reales, al caso en el cual las operaciones básicas se realizan con cantidades generales, indeterminadas. Esto es, cantidades para las cuales no se requiere conocer su valor, sino que es, simplemente, un posible número no conocido. Estas cantidades se representan simbólicamente por literales a, b, x, y etc. De esta forma en el álgebra una literal representa a cualquier posible número real.

DEFINICIONES BASICAS.

En el Álgebra se hallan relacionados diversos tipos de expresiones posibles, las cuales representan a operaciones y cantidades no determinadas.

Una de las expresiones más simples son los números reales representados por literales. Por ejemplo, se puede decir que el número 5 está representado por la letra x. De tal forma que en cualquier parte que se encuentre la literal x, esta siempre equivaldrá la número 5, a menos que se cambie el número que representa x.
Si se suman estas cantidades consigo mismo se obtiene una suma repetida, la cual está representada por la multiplicación de un número con un término elemental.

$$7+7+7+7+7+7+7+7=8\times 7 \quad ; \quad x+x+x+x+x+x=6x$$

En la expresión $6x$*, a la cantidad x le denominaremos literal, y al número 6 le denominaremos coeficiente numérico.*
Si se multiplica un término elemental consigo mismo se obtiene otra cantidad algebraica, al introducir una forma de representar a estas multiplicaciones repetidas.

$$5\times 5\times 5\times 5\times 5\times 5=5^6 \quad ; \quad x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x=x^8$$

Es posible entonces dar algunas definiciones básicas.

Término elemental. *Toda expresión que es la multiplicación de una literal con un número real se denomina **término elemental.** Esto es, un término elemental es cualquier literal (x, z, a, b, etc.), que representa a un posible número, un número real arbitrario (*$3, 2.5, \sqrt{7}, 7/9,$ *etc.), o expresiones del tipo* $6x, -3y, 0.34k$*, etc.*

Es importante poder determinar la forma en que estos términos elementales se combinan entre sí para formar otro tipo de cantidades más generales.

Término elemental base. *Un **término elemental base** es la representación de la multiplicación repetida de un término elemental consigo mismo. Esto es, a las expresiones* x^n*, con n un número entero positivo le denominaremos términos elementales base.*

Cuando se combinan todos estos tipos de expresiones mediante las operaciones de multiplicación, se obtienen cantidades algebraicas más generales

Término algebraico. *Un **término algebraico** es la expresión que se obtiene al combinar términos elementales, afectados posiblemente de exponentes, mediante las operaciones de multiplicación (producto) y división (cociente).*

$$\frac{2x^3y^2}{a^{-2}} \ ; \ \frac{3}{4}x^3y^2 \ ; \ d^{-1/2}$$

donde las expresiones $d^{1/2}$ *y* a^{-2} *son términos elementales base generalizados.*

Si se introducen las operaciones de adición y sustracción de términos algebraicos se obtiene expresiones aún más generales.

Expresión algebraica. *Una **expresión algebraica** es la expresión que se obtiene al combinar términos algebraicos mediante las operaciones básicas de Suma (adición) y Resta (sustracción).*

$$x^2 + y^2 + z^2 \ ; \ (x^3 - y^2)^2 \ ; \ \frac{(a^3 - y^2)^3}{a^2y^{-1}}$$

*Si una expresión algebraica consiste de un único término algebraico se dice que es un **monomio**. Si consiste de la suma de dos términos se dice que es un **binomio**, si consiste de la suma o resta de tres términos se dice que es un **trinomio**, etc.*

Binomio de Newton: *Todo binomio afectado por un exponente arbitrario se dice que es un **binomio de Newton**. Esto es debido a que existen reglas generales para desarrollar el binomio sin necesidad de efectuar la operación en forma explícita.*

$$(2a^3 - 5y^2)^9 \ ; \ (7p^{-1} + 5q^{3/2})^{1/2} \ ; \ (3a^2 + k^2)^{-2}$$

TERMINOS SEMEJANTES

Uno de los problemas principales que se tiene cuando se combinan términos algebraicos mediante las operaciones de suma y Resta es el simplificar las expresiones algebraicas obtenidas. Para efectuar estas expresiones se consideran

*Definición: Dos o más términos se dice que son **semejantes** si poseen los mismos términos elementales base.*
Esto es, dos términos son semejantes si poseen la misma parte literal afectada de los mismos exponentes. Dos términos semejantes difieren solo en el coeficiente numérico que les corresponde.

Por ejemplo, los tres términos algebraicos siguientes son semejantes

$$5x^4y^3z^{-2} \;\; ; \;\; 7x^4z^{-2}y^3 \;\; ; \;\; 3\frac{x^4y^3}{z^2}$$

El proceso mediante el cual se simplifica una expresión algebraica se denomina reducción de términos semejantes. Este proceso consiste en identificar los términos que son semejantes en una expresión algebraica y sumar los coeficientes numéricos de cada uno de estos términos. El resultado de la suma es el coeficiente del término simplificado, el cual tiene la misma parte literal, con los mismos exponentes originales.

***Ejemplo.** Consideremos la siguiente expresión algebraica.*

$$5x^4y^3z^{-2} - 7x^4z^{-2}y^3 + 6\frac{x^4y^3}{z^2} + 5x^3y^2z^2$$

Esta expresión se puede re escribir en la forma

$$5x^4y^3z^{-2} - 7x^4z^{-2}y^3 + 6x^4y^3z^2 + 5x^3y^2z^2$$

Se puede observar que los tres primeros términos tienen la misma parte literal y cada literal tiene el mismo exponente en los tres términos, por lo que son términos semejantes. Sin embargo, el 4to término no es semejante con los anteriores aunque tiene la misma parte literal. ¡No tiene los mismos exponentes!. Entonces, los únicos términos que se pueden simplificar son los tres primeros, por lo que se suman o restan todos sus coeficientes numéricos.

$$(5-7+6)x^4y^3z^{-2} + 5x^3y^2z^2$$

y se obtiene el resultado final

$$4x^4y^3z^{-2}+5x^3y^2z^2$$

Se debe de notar que ***solo*** *se sumaron los coeficientes de los términos semejantes. Las literales y los exponentes no cambiaron. No se pueden sumar o restar los exponentes.*
Esto es, si se tiene la expresión algebraica

$$4x^{1/2}b^4z^2-5x^{1/2}z^2b^4$$

Ambos términos son semejantes, pero no es posible simplificarla en la forma

$$(4-5)x^{1/2+1/2}b^{4+4}z^{2+2}$$

La simplificación seria

$$4x^{1/2}b^4z^2-5x^{1/2}z^2b^4=-x^{1/2}b^4z^2$$

La suma de los exponentes solo seria posible si ambos términos se estuvieran multiplicando entre si.

$$4x^{1/2}b^4z^2 5x^{1/2}z^2b^4=(4\times 5)x^{1/2+1/2}b^{4+4}z^{2+2}=20xb^8z^4$$

Recordemos que las reglas de los exponentes solo son válidas cuando se multiplican o dividen términos algebraicos*.*

Ejemplos

En cada ejemplo se simplifica cada uno de los términos individuales aplicando las reglas de exponentes. Los términos se escriben de tal forma todas las bases están escritas como numeradores. Al identificar los términos semejantes se procede a la simplificación de la expresión algebraica.

1. $3x^2y^3a^2+5\sqrt{x^4y^6}aa-2x^3y^4a+6\dfrac{x^4\sqrt{a^4}}{x^2y^{-3}}+8(x^6y^2)^{1/2}y^3a^2a^{-1}$

$$=3x^2y^3a^2+5x^2y^3a^2-2x^3y^4a+6x^2y^3a^2+8x^3y^4a=14x^2y^3a^2+6x^3y^4a$$

2. $4\sqrt{\dfrac{z^8k^4b^4}{z^4b^2}}+12z^2b^2k^2b^{-1}+9z^3kb^{-2}-8\dfrac{(z^6k^2)^{1/2}}{b^2}$

$$=4z^2bk^2+12z^2bk^2+9z^3kb^{-2}-8z^3kb^{-2}=16z^2bk^2+z^3kb^{-2}$$

EJERCICIOS.

Simplifica cada una de las expresiones algebraicas dadas.

1, $-3k\sqrt{\dfrac{z^4k^2b^4z^4}{(z^2b)^2}}-5\dfrac{b^3z^2k^5}{k^3b^2}\ +9\dfrac{z^3}{b}\sqrt{k^2b^{-2}}-8\dfrac{z(z^2k^2)^{1/2}(z^2k^{-2})^{1/2}}{b^2k^{-1}}$

2. $2x^2y^3+\dfrac{8}{3}xy^2\sqrt{z^2}-2xy^2x(y^{1/3})^3\ +4yzxy+5\sqrt{x^2z^2}\,y^{4/2}$

3. $2\dfrac{a^3c^2}{b^2}-4a\dfrac{acb}{b^{-2}}\ +5\dfrac{a^4c^5}{ab^2c^3}-7a^2cb^3\ +4a\left(\dfrac{ac}{b}\right)^2+a\dfrac{\sqrt{a^2b^4}}{c^{-1}b^{-1}}$

4. $6\left(\dfrac{x^2y}{z}\right)^3\left(\dfrac{z}{x}\right)^4-2\dfrac{y^2z^3}{x}\ +5(xy^2)^2y^{-1}z+5\dfrac{(yz^2)^2}{xy}\ +7xy(xy^2)z-4\dfrac{x^3y^{-2}z}{x^4z^{-2}y^{-4}}$

5. $9(m^2n^2p)^2m^2\ +2m^2n^4p^2\ -3\dfrac{m^2(mn^2)^2}{(mp^{-3})^2}\ +4\dfrac{p(nm^2)^3}{p^{-1}n^{-1}}\ -7(pm)^2(n^2p^2)^2$

FACTORIZACION

La factorización es el proceso de re escribir una expresión algebraica como el producto de expresiones algebraicas más simples. Esto es, re escribir una "suma" como una "multiplicación".

Por ejemplo, la expresión algebraica x^2+5x+6 *se puede re escribir como el producto de las expresiones* $(x+3)$ *y* $(x+2)$ *en la forma:*

$$x^2+5x+6=(x+3)(x+2)$$

Entonces, dada una expresión algebraica E *se requiere hallar expresiones algebraicas* $E_1, E_2, \ldots, E_n$*, las cuales en principio son más simples, de tal forma que:*

$$E=E_1\cdot E_2\cdot\cdots\cdot E_n$$

De esta forma el problema de la factorización consiste en determinar las expresiones $E_1, E_2, \ldots, E_n$.

A las expresiones algebraicas $E_1, E_2, \ldots, E_n$ *se les denomina factores algebraicos o simplemente factores.*

Existen varios métodos que permiten determinar estos factores algebraicos, dependiendo de la estructura que tiene la expresión algebraica que se debe de factorizar.

FACTOR COMUN

Uno de los casos más simples en el proceso de factorización es cuando en la expresión existe alguna literal o número que aparece en cada uno de los términos algebraicos.

Si en una expresión algebraica hay alguna literal o número que se repite en cada uno de los términos, se dice que dicha literal o número es un "factor común".

$$4x^3y^5 - 16a^2x^4 + 10x^5y^2$$

En esta expresión la literal x es un factor común porque aparece en los tres términos de la expresión algebraica. Pero se puede observar que hay un número que también se repite a lo largo de la expresión. Los números 4, 16 y 10 tienen un divisor común que es el 2. Entonces el 2 es un factor común. Las literales a y y no son factores comunes ya que no se "repiten" en todos los términos.

Para factorizar este tipo de expresiones, que tienen factores comunes, se "saca" el o los factores comunes con la potencia más baja, y para el caso de los factores numéricos se "saca" el máximo común divisor:

$$2x^3(2y^5 - 8a^2x + 5x^2y^2)$$

Se puede observar que al factorizar el término x^3 cada uno de los términos originales se divide entre x^3 o equivalentemente, cada potencia original del factor común disminuye tantas unidades como sea la potencia del término factorizado.

Ejemplo

$21a^3k^4 + 63a^5k^2b^2 - 14a^4k^3b^3 + 49a^6k^5c^4$

Las literales a y k aparecen en cada uno de los cuatro términos por lo que son factores comunes. Los números 21, 63, 14 y 49 se pueden dividir entre 7, y su máximo común divisor es el 7. Entonces, el 7 es
un factor común. Se puede factorizar el número 7 por lo que cada número original se divide entre 7. Se factoriza la literal a y k con la potencia mínima. Esto es se "sacan" los términos a^3 y k^2. Entonces:

$$21a^3k^4 + 63a^5k^2b^2 - 14a^4k^3b^3 + 49a^6k^5c^4 = 7a^3k^2(3k^2 + 9a^2b^2 - 2akb^3 + 7k^3c^4)$$

AGRUPACION DE TERMINOS

Se puede dar el caso que una expresión algebraica no contenga factores comunes, pero es posible que si se agrupan los términos de la expresión cada grupo posea factores comunes.

Ejemplo

$2x^4 + 6x^3z^2 - 5xy^2 - 15z^2y^2$

En esta expresión se puede observar que no hay ningún factor común, ya sea una literal o un número, por lo que no se puede factorizar por factor común. Sin embargo, si se agrupan los términos de dos en dos se tiene:

$$\underbrace{2x^4 + 6x^3z^2}_{1er.\,grupo} \underbrace{- 5xy^2 - 15z^2y^2}_{2do.\,grupo}$$

Se puede observar que en el primer grupo x y el número 2 son factores comunes y en el segundo grupo y, el número 5 y un signo negativo son factores comunes. Factorizando se tiene que del primer grupo "sale" un 2 y una x^3, mientras que del segundo grupo "sale" un signo negativo, un número 5 y una y^2, por lo que se obtiene la expresión siguiente:

$$\underbrace{2x^3(x+3z^2)}_{1er.\,grupo} \underbrace{- 5y^2(x+3z^2)}_{2do.\,grupo}$$

Al factorizar el signo negativo en el segundo grupo cada uno de los términos del grupo cambia de signo. Se observa que no esta factorizada por completo la expresión, sin embargo en cada grupo hay una expresión que se repite. La expresión $(x+3z^2)$ es un factor común, ya que se repite en los dos grupos. Entonces, se puede factorizar para obtener la factorización completa:

$$(2x^3 - 5y^2)(x+3z^2)$$

De esta forma se tiene que:

$$2x^4 + 6x^3z^2 - 5xy^2 - 15z^2y^2 = (2x^3 - 5y^2)(x+3z^2)$$

Ejemplo

Se desea factorizar la expresión algebraica:

$$12a^2x + 8a^2y^2 - 20a^2 - 21xb^3 - 14b^3y^2 + 35b^3$$

La expresión es tal que no tiene factores comunes, por lo que se intenta agrupar términos.

$$\underbrace{12a^2x}_{1er\,término} \underbrace{+8a^2y^2}_{2do\,término} \underbrace{-20a^2}_{3er\,término} \underbrace{-21xb^3}_{4to\,término} \underbrace{-14b^3y^2}_{5to\,término} \underbrace{+35b^3}_{6to\,término}$$

Se observa que los tres primeros términos tienen factores comunes y los últimos tres términos también tienen factores comunes. Entonces, agrupando en grupos de tre términos se tiene:

$$\underbrace{12a^2x+8a^2y^2-20a^2}_{1er.\,grupo}\underbrace{-21xb^3-14b^3y^2+35b^3}_{2do.\,grupo}$$

Del primer grupo se factoriza $4a^2$ *, y del segundo* $-7b^3$ *:*

$$\underbrace{4a^2(3x+2y^2-5)}_{1er.\,grupo}\underbrace{-7b^3(3x+2y^2-5)}_{2do.\,grupo}$$

La expresión $(3x+2y^2-5)$ *es común, por lo que se factoriza y se obtiene:*

$$(3x+2y^2-5)(4a^2-7b^3)$$

Se agruparon los términos un dos grupos. Sin embargo es posible agrupar los términos de diferente manera.

$$\underbrace{12a^2x}_{1er\,término}\underbrace{+8a^2y^2}_{2do\,término}\underbrace{-20a^2}_{3er\,término}\underbrace{-21xb^3}_{4to\,término}\underbrace{-14b^3y^2}_{5to\,término}\underbrace{+35b^3}_{6to\,término}$$

Los términos 1ro y 4do, 2do y 5to, y 3ro y 6to tienen factores comunes, por lo que se puede agrupar la expresión en tres grupos, cada grupo conteniendo dos términos.

$$\underbrace{12a^2x-21xb^3}_{1er.\,grupo}\underbrace{+8a^2y^2-14b^3y^2}_{2do.\,grupo}\underbrace{-20a^2+35b^3}_{3er.\,grupo}$$

Del primer grupo se factoriza $3x$ *, del segundo* $2y^2$ *y del tercero un* -5 *.*

$$\underbrace{3x(4a^2-7b^3)}_{1er.\,grupo}\underbrace{+2y^2(4a^2-7b^3)}_{2do.\,grupo}\underbrace{-5(4a^2-7b^3)}_{3er.\,grupo}$$

La expresión $(4a^2-7b^3)$ *es común a los tres grupos, por lo que es posible factorizarlo para obtener:*

$$(4a^2-7b^3)(3x+2y^2-5)$$

Entonces, se tiene que el resultado de la factorización es:

$$12a^2x+8a^2y^2-20a^2-21xb^3-14b^3y^2+35b^3 = (3x+2y^2-5)(4a^2-7b^3)$$

DIFERENCIA DE CUADRADOS

Si la expresión algebraica es la diferencia o resta de dos términos cuadráticos, es fácil hallar la factorización. Expresiones que son la diferencia de términos cuadráticos son, por ejemplo:

$$x^2y^4 - a^2 \quad ; \quad \frac{c^4}{x^2y^6} - z^2a^6 \quad ; \quad \frac{c^4}{x^2y^6} - \frac{b^6}{a^2}$$

El proceso de factorización de una diferencia de cuadrados es como sigue: Se determina la raíz cuadrada de cada uno de los términos y se escribe la suma por la resta de las raíces obtenidas.

$$\begin{array}{l} a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) \\ \downarrow \quad\;\; \downarrow \\ \scriptstyle raíz \quad raíz \\ a \qquad b \end{array}$$

Las dos expresiones obtenidas $a+b$ *y* $a-b$ *se denominan binomios conjugados.*

Ejemplo

$$\begin{array}{l} x^2y^4 - a^2b^6 = (xy^2 + ab^3)(xy^2 - ab^3) \\ \;\downarrow \qquad\;\; \downarrow \\ \scriptstyle raíz \qquad raíz \\ xy^2 \qquad ab^3 \end{array}$$

Los binomios conjugados son:

$xy^2 + ab^3$ *y* $xy^2 - ab^3$

Ejemplo

$$\begin{array}{ccccc} \dfrac{c^4}{x^2y^6} & - & \dfrac{b^6}{a^2} & = & \left(\dfrac{c^2}{xy^3} + \dfrac{b^3}{a}\right)\left(\dfrac{c^2}{xy^3} - \dfrac{b^3}{a}\right) \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ \scriptstyle raíz & & \scriptstyle raíz & & \\ \dfrac{c^2}{xy^3} & & \dfrac{b^3}{a} & & \end{array}$$

Los binomios conjugados son en este caso:

$\dfrac{c^2}{xy^3} + \dfrac{b^3}{a}$ *y* $\dfrac{c^2}{xy^3} - \dfrac{b^3}{a}$

Ejemplo

$$\underset{\substack{\downarrow \\ raíz \\ 7ay^4}}{49a^2y^8} \quad - \quad \underset{\substack{\downarrow \\ raíz \\ \frac{4a^5}{9x}}}{\frac{16a^{10}}{81x^2}} \quad = \quad \left(7ay^4 + \frac{4a^5}{9x}\right)\left(7ay^4 - \frac{4a^5}{9x}\right)$$

Los binomios conjugados obtenidos son:

$7ay^4 + \frac{4b^5}{9x}$ *y* $7ay^4 - \frac{4b^5}{9x}$

Ejemplo

$$\underset{\substack{\downarrow \\ raíz \\ 3x^2y^3}}{9x^4y^6} \quad - \quad \underset{\substack{\downarrow \\ raíz \\ 4a^5}}{16a^{10}} \quad = \quad (3x^2y^3 + 4a^5)(3x^2y^3 - 4a^5)$$

Sin embargo es posible factorizar cualquier expresión que sea la diferencia de dos términos algebraicos arbitrarios, no necesariamente cuadráticos.

Ejemplo

$$\underset{\substack{\downarrow \\ raíz \\ x^{3/2}}}{x^3} \; - \; \underset{\substack{\downarrow \\ raíz \\ z^{5/2}y^3}}{z^5y^6} \; = (x^{3/2} + z^{5/2}y^3)(x^{3/2} - z^{5/2}y^3)$$

Los binomios conjugados son: $x^{3/2} + z^{5/2}y^3$ *y* $x^{3/2} - z^{5/2}y^3$

Ejemplo

$$\underset{\substack{\downarrow \\ raíz \\ y^{1/2}}}{y} \; - \; \underset{\substack{\downarrow \\ raíz \\ w^{1/2}}}{w} \; = (y^{1/2} + w^{1/2})(y^{1/2} - w^{1/2})$$

Los binomios conjugados son: $y^{1/2} + w^{1/2}$ *y* $y^{1/2} - w^{1/2}$

Ejemplo

$$\frac{x^3}{k^2y^5}-\frac{b^7}{a}=\left(\frac{x^{3/2}}{ky^{5/2}}+\frac{b^{7/2}}{a^{1/2}}\right)\left(\frac{x^{3/2}}{ky^{5/2}}-\frac{b^{7/2}}{a^{1/2}}\right)$$

Los binomios conjugados obtenidos son en este caso:

$\frac{x^{3/2}}{ky^{5/2}}+\frac{b^{7/2}}{a^{1/2}}$ *y* $\frac{x^{3/2}}{ky^{5/2}}-\frac{b^{7/2}}{a^{1/2}}$

Ejemplo

$$(x+y)^2-(a^2-b^3)^2=(x+y+a^2-b^3)(x+y-(a^2-b^3))$$

$$\underset{x+y}{\overset{\downarrow}{\scriptstyle raíz}}\qquad \underset{a^2-b^3}{\overset{\downarrow}{\scriptstyle raíz}}\qquad =(x+y+a^2-b^3)(x+y-a^2+b^3)$$

$x+y+a^2-b^3$ *y* $x+y-a^2+b^3$ *son los binomios conjugados obtenidos.*

Ejemplo

$$\frac{7c^4}{xy^6}-\frac{b^5}{8a^2}=\left(\frac{\sqrt{7}c^2}{x^{1/2}y^3}+\frac{b^{5/2}}{\sqrt{8}\,a}\right)\left(\frac{\sqrt{7}c^2}{x^{1/2}y^3}-\frac{b^{5/2}}{\sqrt{8}\,a}\right)$$

$$\underset{\frac{\sqrt{7}c^2}{x^{1/2}y^3}}{\overset{\downarrow}{\scriptstyle raíz}}\qquad \underset{\frac{b^{5/2}}{\sqrt{8}\,a}}{\overset{\downarrow}{\scriptstyle raíz}}$$

Los Binomios conjugados son:

$\frac{\sqrt{7}c^2}{x^{1/2}y^3}+\frac{b^{5/2}}{\sqrt{8}a}$ *y* $\frac{\sqrt{7}c^2}{x^{1/2}y^3}-\frac{b^{5/2}}{\sqrt{8}a}$

TRINOMIO CUADRADO PERFECTO

Un trinomio cuadrado perfecto (t.c.p) es aquel trinomio que se puede escribir como un binomio cuadrado. Esto significa que al factorizar un trinomio cuadrado perfecto se obtienen como factores dos binomios idénticos.

$$25-10y+y^2=(5-y)(5-y)=(5-y)^2$$

$$a^4b^6-10a^2b^3x^2+25x^4=(a^2b^3-5x^2)(a^2b^3-5x^2)=(a^2b^3-5x^2)^2$$

$$x^4+2x^2y^3+y^6=(x^2+y^3)(x^2+y^3)=(x^2+y^3)^2$$

Para determinar si un trinomio es un Trinomio cuadrado perfecto (t.c.p.) se ordena el trinomio respecto a una literal. Se halla la raíz cuadrada del 1ero y 3er términos. Se determina el doble producto de las raíces obtenidas. Si el doble producto es igual, excepto quizás el signo, al 2do término del trinomio, entonces se trata de un t.c.p. Si un trinomio es un t.c.p. este se puede factorizar escribiendo el cuadrado de la suma o la resta de las raíces obtenidas, dependiendo del signo del 2do término. El resultado es un binomio cuadrado.

Ejemplo

$$\begin{array}{ccccccc} y^2 & - & 10y & + & 25 & = & (y-5)^2 \\ \downarrow & & & & \downarrow & & \\ \scriptstyle raíz & & & & \scriptstyle raíz & & \\ y & & & & 5 & & \end{array}$$

$$\underbrace{2(y)(5)}_{dobleproducto} = 10y$$

Ejemplo

$$\begin{array}{ccccccc} a^4b^6 & - & 10a^2b^3x^2 & + & 25x^4 & = & (a^2b^3-5x^2)^2 \\ \downarrow & & & & \downarrow & & \\ \scriptstyle raíz & & & & \scriptstyle raíz & & \\ a^2b^3 & & & & 5x^2 & & \end{array}$$

$$\underbrace{2(a^2b^3)(5x^2)}_{dobleproducto} = 10a^2b^3x^2$$

Ejemplo

$$\begin{array}{ccccccc} x^4 & + & 2x^2y^3 & + & y^6 & = & (x^2+y^3)^2 \\ \downarrow & & & & \downarrow & & \\ \scriptstyle raíz & & & & \scriptstyle raíz & & \\ x^2 & & & & y^3 & & \end{array}$$

$$\underbrace{2(x^2)(y^3)}_{dobleproducto} = 2x^2y^3$$

Ejemplo

$$\begin{array}{ccccccc} \dfrac{9a^4}{b^6} & - & \dfrac{30a^2}{b^3x^2} & + & \dfrac{25}{x^4} & = & \left(\dfrac{3a^2}{b^3}-\dfrac{5}{x^2}\right)^2 \\ \downarrow & & & & \downarrow & & \\ \scriptstyle raíz & & & & \scriptstyle raíz & & \\ \dfrac{3a^2}{b^3} & & & & \dfrac{5}{x^2} & & \end{array}$$

$$\underbrace{2\left(\frac{3a^2}{b^3}\right)\left(\frac{5}{x^2}\right)}_{dobleproducto} = \frac{30a^2}{b^3x^2}$$

TRINOMIO CUADRADO PERFECTO POR ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN

Hay ocasiones en que un trinomio no es un trinomio cuadrado perfecto, pero es posible factorizar el trinomio si se busca un término adecuado que se debe sumar y restar al mismo tiempo al trinomio original para obtener un trinomio cuadrado perfecto dentro de una diferencia de cuadrados.

Ejemplo*. Factorizar la expresión* $4x^6 + 11x^3y^2 + 25y^4$
Se observa que se trata de un trinomio, pero se puede verificar que no es un trinomio cuadrado perfecto. Cuando se verifica si es un trinomio cuadrado perfecto se observa que el doble producto debe ser igual a $20x^3y^2$*, pero se tiene* $11x^3y^2$*. Entonces, el proceso consiste en sumar y restar un término para que el término intermedio sea exactamente igual al doble producto de la raíz de los términos de los extremos. Entonces, se suma y resta el término* $9x^3y^2$

$$\begin{array}{llllll}
4x^6 & +11x^3y^2 & +25y^4 & + & 9x^3y^2 - 9x^3y^2 \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
{\scriptstyle raiz} & & {\scriptstyle raiz} & & \\
2x^3 & & 5y^2 & & \\
 & 20x^3y^2 & & & \\
 & {\scriptstyle dobleproducto} & & &
\end{array}$$

Al simplificar los cuatro primeros términos se obtiene el trinomio cuadrado perfecto, el cual se factoriza como un binomio cuadrado para obtener una diferencia de cuadrados.

$$4x^6 + 20x^3y^2 + 25y^4 - 9x^3y^2 = (2x^3 + 5y^2)^2 - 9x^3y^2$$

Se factoriza la diferencia de cuadrados

$$\begin{array}{lllll}
(2x^3 + 5y^2)^2 & - & 9x^3y^2 & = & (2x^3 + 5y^2 + 3x^{3/2}y)(2x^3 + 5y^2 - 3x^{3/2}y) \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
{\scriptstyle raiz} & & {\scriptstyle raiz} & & \\
2x^3 + 5y^2 & & 3x^{3/2}y & &
\end{array}$$

Se obtiene el resultado

$$4x^6 + 11x^3y^2 + 25y^4 = (2x^3 + 5y^2 + 3x^{3/2}y)(2x^3 + 5y^2 - 3x^{3/2}y)$$

Ejemplo. *Factorizar la expresión* $49a^{-4} - 46a^{-2}b^3 + 9b^6$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ raiz \\ 7a^{-2}}}{49a^{-4}} \quad \underset{\substack{42a^{-2}b^{3} \\ dobleproducto}}{-46a^{-2}b^{3}} \quad \underset{\substack{\downarrow \\ raiz \\ 3b^{3}}}{+9b^{6}} \quad + \quad 4a^{-2}b^{3} - 4a^{-2}b^{3}$$

Se obtiene la diferencia de cuadrados

$$49a^{-4} - 42a^{-2}b^{3} + 9b^{6} - 4a^{-2}b^{3} = (7a^{-2} - 3b^{3})^{2} - 4a^{-2}b^{3}$$

Al factorizar la diferencia de cuadrados

$$\underset{\substack{\downarrow \\ raiz \\ 7a^{-2} - 3b^{3}}}{(7a^{-2} - 3b^{3})^{2}} \quad - \quad \underset{\substack{\downarrow \\ raiz \\ 2a^{-1}b^{3/2}}}{4a^{-2}b^{3}} \quad = \quad (7a^{-2} - 3b^{3} + 2a^{-1}b^{3/2})(7a^{-2} - 3b^{3} - 2a^{-1}b^{3/2})$$

Se obtiene el resultado

$$49a^{-4} - 46a^{-2}b^{3} + 9b^{6} = (7a^{-2} - 3b^{3} + 2a^{-1}b^{3/2})(7a^{-2} - 3b^{3} - 2a^{-1}b^{3/2})$$

SUMA DE CUADRADOS

Es posible que se necesite factorizar una suma de cuadrados. En este caso es posible factorizar la suma de cuadrados si se completa un trinomio cuadrado perfecto sumando y restando algún término adecuado a la expresión original. Al sumar y restar una misma cantidad, en realidad se está sumando un cero, el cual es el neutro aditivo por lo que no se altera la expresión. ¡Es un truquito!. Posteriormente se factoriza la diferencia de cuadrados obtenida. Esto es, la suma de cuadrados se transforma a una diferencia de cuadrados.

Ejemplo. *Factorizar la expresión* $x^{8} + 64y^{4}$

Se procede en una forma análoga a la realizada para verificar si un trinomio es un trinomio cuadrado perfecto.
Se obtiene la raíz cuadrada de los dos términos, para formar el doble producto de las dos raíces. El resultado del doble producto es el término que se suma y se resta a la expresión.
Los tres primeros términos forman un trinomio cuadrado perfecto por lo que se puede factorizar para obtener un binomio cuadrado.

$$\begin{array}{ccccc} x^8 & + & 64y^4 & + & 16x^4y^2 - 16x^4y^2 \\ \downarrow & & \downarrow & = & (x^4+8y^2)^2 - 16x^4y^2 \\ {\scriptstyle raiz} & & {\scriptstyle raiz} & & \\ x^4 & & 8y^2 & & \\ & \underset{dobleproducto}{16x^4y^2} & & & \end{array}$$

Se obtiene un binomio cuadrado menos el término que se resto. Esta expresión es una diferencia de cuadrados por lo que se puede factorizar como el producto de la suma por la resta de las raíces de ambos términos.

$$\begin{array}{ccccc} (x^4+8y^2)^2 & - & 16x^4y^2 & = & (x^4+8y^2+4x^2y)(x^4+8y^2-4x^2y) \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ {\scriptstyle raiz} & & {\scriptstyle raiz} & & \\ x^4+8y^2 & & 4x^2y & & \end{array}$$

De esta forma se tiene:

$$x^8 + 64y^4 = (x^4+8y^2+4x^2y)(x^4+8y^2-4x^2y)$$

Ejemplo. *Factorizar la expresión* $100x^4b^8 + 25y^4$

Se determina el término que se debe sumar y restar, para obtener la diferencia de cuadrados.

$$\begin{array}{ccccc} 100x^4b^8 & + & 25y^4 & + & 100x^2b^4y^2 - 100x^2b^4y^2 \\ \downarrow & & \downarrow & = & (10x^2b^4+5y^2)^2 - 100x^2b^4y^2 \\ {\scriptstyle raiz} & & {\scriptstyle raiz} & & \\ 10x^2b^4 & & 5y^2 & & \\ & \underset{dobleproducto}{100x^2b^4y^2} & & & \end{array}$$

Se factoriza la diferencia de cuadrados.

$$\begin{array}{ccccc} (10x^2b^4+5y^2)^2 & - & 100x^2b^4y^2 & = & (10x^2b^4+5y^2+10xb^2y)(10x^2b^4+5y^2-10xb^2y) \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ {\scriptstyle raiz} & & {\scriptstyle raiz} & & \\ 10x^2b^4+5y^2 & & 10xb^2y & & \end{array}$$

Se obtiene el resultado.

$$100x^4b^8 + 25y^4 = (10x^2b^4+5y^2+10xb^2y)(10x^2b^4+5y^2-10xb^2y)$$

TRINOMIO CUADRÁTICO

Se puede dar el caso de que un trinomio no sea un trinomio cuadrado perfecto. En este caso se puede verificar si el trinomio es un trinomio cuadrático.
Todo trinomio que tenga la estructura

$$E^2 + bE + c$$

es un Trinomio cuadrático, donde E es un término o expresión algebraica arbitraria, y las cantidades b y c son coeficientes numéricos.
El trinomio está ordenado respecto al término o expresión E, la cual solo se encuentra en el 1ero y 2do términos. El 3er término es solo un coeficiente numérico. Se debe de observar que el coeficiente del 1er término es 1.

Ejemplo.
$a^2 + 8a + 15$; $x^6 - 3x^3 - 10$; $(x^2 + y^2)^2 + 5(x^2 + y^2) + 4$

Para verificar si un trinomio es un trinomio cuadrático, se ordena el trinomio respecto a una literal, un término o una expresión algebraica. Por ejemplo: a, x, $(x^2 + y^2)$ en los ejemplos anteriores. La potencia del primer término debe ser el doble de la potencia del 2do término, y el 3er término es solo un coeficiente numérico, en el cual no aparece la expresión que ordena al trinomio.

Ejemplo.
$a^2 + 8a + 15 \rightarrow E = a, b = 8, c = 15$
$x^6 - 3x^3 - 10 \rightarrow E = x^3, b = -3, c = -10$
$(x^2 + y^2)^2 + 5(x^2 + y^2) + 4 \rightarrow E = x^2 + y^2, b = 5, c = 4$

Para factorizar un trinomio cuadrático se obtiene la raíz del primer término, E. Se buscan dos números k_1 y k_2 cuya suma sea igual al coeficiente del 2do término, $k_1 + k_2 = b$, y cuya multiplicación sea igual al término independiente $k_1 k_2 = c$. La factorización del trinomio cuadrático es el producto de dos binomios. Cada binomio es la suma de la expresión E y los números k_1 y k_2 determinados.

$$\begin{array}{ccccc} E^2 & +bE & +c & = & (E + k_1)(E + k_2) \\ \downarrow_{raíz} & & & & k_1 + k_2 = b \\ E & & & & k_1 k_2 = c \end{array}$$

Ejemplos de factorización de un trinomio cuadrático.

Ejemplo. $a^2 - 2a - 15 \;\rightarrow E = a$

$$\begin{array}{llllll} a^2 & -2a & -15 & = & (a+3)(a-5) \\ \downarrow_{raíz} & & & & 3-5=-2 \\ a & & & & 3\times(-5)=-15 \end{array}$$

Ejemplo. $(x^2+y^2)^2 + 5(x^2+y^2) + 4 \;\rightarrow E = x^2+y^2$

$$\begin{array}{llllll} (x^2+y^2)^2 & +5(x^2+y^2) & +4 & = & (x^2+y^2+1)(x^2+y^2+4) \\ \downarrow_{raíz} & & & & 1+4=5 \\ x^2+y^2 & & & & 1\times 4=4 \end{array}$$

Ejemplo. $9x^4y^6 + 30x^2y^3 + 21 \;\rightarrow E = 3x^2y^3$

$$\begin{array}{llllll} 9x^4y^6 & +30x^2y^3 & +21 & = & (3x^2y^3+3)(3x^2y^3+7) \\ \downarrow_{raíz} & +10(3x^2y^3) & & & 3+7=10 \\ 3x^2y^3 & & & & 3\times 7=21 \end{array}$$

Se debe de observar que el problema recae en poder determinar los números k_1 *y* k_2 *adecuados. Esto es fácil cuando los números son números enteros. Pero si los números son reales arbitrarios, por ejemplo* $3/7$, $\sqrt{5}$, $3\sqrt{4}$, 4.234 *etc., es difícil determinarlos. En una sección posterior, ecuación cuadrática, se utilizara la formula general de segundo orden para poder determinar estos números.*

Por otro lado es posible que una expresión sea un trinomio pero con potencias generalizadas. Entonces, es posible tener trinomios cuadráticos muy generales, los cuales admiten también una factorización simple.

Ejemplo. $7x^{1/2} - 11\sqrt{7}x^{1/4} + 18 \;\rightarrow E = \sqrt{7}x^{1/4}$

$$\begin{array}{llllll} 7x^{1/2} & -11\sqrt{7}x^{1/4} & +18 & = & (\sqrt{7}x^{1/4}-2)(\sqrt{7}x^{1/4}-9) \\ \downarrow_{raíz} & & & & (-2)+(-9)=-11 \\ \sqrt{7}x^{1/4} & & & & (-2)\times(-9)=18 \end{array}$$

Ejemplo. $5x^3k^4 - 4\sqrt{5}x^{3/2}k^2 - 5 \;\rightarrow E = \sqrt{5}x^{3/2}k^2$

$$5x^3k^4 \quad -4\sqrt{5}x^{3/2}k^2 \quad -5 \quad = \quad (\sqrt{5}x^{3/2}k^2-5)(\sqrt{5}x^{3/2}k^2+1)$$

$$\downarrow_{raíz} \qquad (-5)+(1)=-4$$

$$\sqrt{5}x^{3/2}k^2 \qquad (-5)\times(1)=-5$$

Ejemplo. $3x^{-1/3}k^{1/4}+\sqrt{3}x^{-1/6}k^{1/8}-12 \;\to E=\sqrt{3}x^{-1/6}k^{1/8}$

$$3x^{-1/3}k^{1/4} \quad +\sqrt{3}x^{-1/6}k^{1/8} \quad -12 \quad = \quad (\sqrt{3}x^{-1/6}k^{1/8}-3)(\sqrt{3}x^{-1/6}k^{1/8}+4)$$

$$\downarrow_{raíz} \qquad (-3)+(4)=-1$$

$$\sqrt{3}x^{-1/6}k^{1/8} \qquad (-3)\times(4)=-12$$

TRINOMIO aE^2+bE+c

En un trinomio cuadrático se ha supuesto que el coeficiente numérico del término que ordena al trinomio es 1. Solo en este caso se pueden buscar los números k_1 *y* k_2, *y realizar la factorización.*
Cuando este coeficiente es distinto de uno, es posible factorizar el trinomio re escribiéndola como un trinomio cuadrático.
Consideremos el siguiente trinomio.

$$aE^2+bE+c$$

Se multiplica y divide el trinomio por el coeficiente del término cuadrático.

$$\frac{a}{a}\left(aE^2+bE+c\right)$$

Observar que al multiplicar y dividir por el coeficiente a, en realidad se esta multiplicando por un 1, por lo que no se esta haciendo nada, (es un truquito).
Se distribuye el coeficiente a en el trinomio siguiendo las reglas siguientes:
El coeficiente a multiplica al término cuadrático, pero la multiplicación se re escribe como $a\cdot aE^2=(aE)^2$

El coeficiente a entra y multiplica al término lineal, y se re escribe en la forma $a\cdot bE=b(aE)$
Por último, él coeficiente a entra y multiplica al término independiente, y la multiplicación si se efectúa en forma explícita $a\cdot c$. *Se obtiene la expresión:.*

$$\frac{(aE)^2+b(aE)+ac}{a}$$

La expresión en el numerador ya es un trinomio cuadrático, por lo que se puede factorizar por el método de la sección anterior.
Se obtiene la raíz del término cuadrático y se buscan dos números k_1 *y* k_2 *de tal forma que se tenga la expresión*

$$\frac{(aE)^2+b(aE)+ac}{a}=\frac{(aE+k_1)(aE+k_2)}{a}$$

Solo falta descomponer el coeficiente a en dos factores, a_1 *y* a_2*, de tal manera que cada uno de estos números divida a uno de los factores. Se obtiene la factorización.*

$$aE^2+bE+c=\left(\frac{aE+k_1}{a_1}\right)\left(\frac{aE+k_2}{a_2}\right)$$

Ejemplo. *Factorizar el trinomio* $6x^2+x-2$

$$6x^2+x-2=\frac{6}{6}\left(6x^2+x-2\right)=\frac{(6x)^2+(6x)-12}{6}=\frac{(6x+4)(6x-3)}{6}$$

$$=\left(\frac{6x+4}{2}\right)\left(\frac{6x-3}{3}\right)=(3x+2)(2x-1)$$

De esta forma la factorización del trinomio es:

$$6x^2+x-2=(3x+2)(2x-1)$$

Ejemplo. *Factorizar el trinomio* $10a^8b^2-29a^4b+10$

$$10a^8b^2-29a^4b+10=\frac{10}{10}\left(10a^8b^2-29a^4b+10\right)=\frac{(10a^4b)^2-29(10a^4b)+100}{10}$$

$$=\left(\frac{10a^4b-25}{5}\right)\left(\frac{10a^4b-4}{2}\right)=(2a^4b-5)(5a^4b-2)$$

La factorización es:

$$10a^8b^2-29a^4b+10=(2a^4b-5)(5a^4b-2)$$

Ejemplo. *Factorizar el trinomio* $12\frac{a^6x^2}{y^4}+5\frac{a^3x}{y^2}-2$

$$12\frac{a^6x^2}{y^4}+5\frac{a^3x}{y^2}-2=\frac{12}{12}\left(12\frac{a^6x^2}{y^4}+5\frac{a^3x}{y^2}-2\right)=\frac{\left(12\frac{a^3x}{y^2}\right)^2+5\left(12\frac{a^3x}{y^2}\right)-24}{12}$$

$$=\frac{\left(12\frac{a^3x}{y^2}+8\right)\left(12\frac{a^3x}{y^2}-3\right)}{12}=\left(\frac{12\frac{a^3x}{y^2}+8}{4}\right)\left(\frac{12\frac{a^3x}{y^2}-3}{3}\right)=\left(3\frac{a^3x}{y^2}+2\right)\left(4\frac{a^3x}{y^2}-1\right)$$

La factorización del trinomio cuadrático es:

$$12\frac{a^6x^2}{y^4}+5\frac{a^3x}{y^2}-2=\left(3\frac{a^3x}{y^2}+2\right)\left(4\frac{a^3x}{y^2}-1\right)$$

EJERCICIOS.

Factor común

1. $6x^3y-15x^2y^2+9x^3y^3$

2. $10x^{n+1}y^2-8x^{n+2}+10x^ny$

3. $-6x^4y^2-10x^2y^4+4x^6yz$

4. $15a^7b^3c-25a^3b^4c^4+40a^5b^2c^3$

5. $6x^4a^3b^2-9x^2a^7b^2+15x^2a^3b^4-12x^2a^5b^5$

6. $12a^3b^nx^{m+3}-16a^5b^{n+2}x^m+20a^2b^{n+2}x^{m+4}$

7. $\frac{10}{9}x^7b^5+\frac{8}{9}x^5b^4-\frac{8}{15}x^8b^2$

8. $\frac{3}{8}a^5b^3c^2-\frac{15}{28}a^3b^5c^4+\frac{9}{20}a^6b^2c^5$

9. $\frac{2}{15}x^5b^5y^4+\frac{4}{9}x^4b^3y^7-\frac{5}{6}x^2b^7y^6$

10. $\frac{2}{15}a^5p^5q^5-\frac{6}{25}a^8p^2q^7+\frac{8}{35}a^3p^4q^8$

Agrupación de términos

1. $12x-3xa-8y+2ya-2by+3bx$

2. $10ax-8ya+15xb-12yb$

3. $ax-2ay-bx+cx+2by-2cy$

4. $3x^2a^2+2x^2b^3+3y^3a^2+2y^3b^3$

5. $-pr+3pw+2qr-6qw+p-2q$

6. $4a^3+2x-y-2xa^3-4+ya^3$

7. $2ka+6bk-8k-a-3b+4$

8. $12-20x+12y-6p+10px-6py$

9. $15+3x^3+3y+10a^2+2a^2x^3+2a^2y+20b^3+4x^3b^3+4yb^3$

10. $3xa+bx-3y^na+6pa-x-2p+y^n+2pb-by^n$

Diferencia de cuadrados

1. $a^2y^4-\frac{9}{4}x^6p^8$

2. $4x^3y^2-9z^5p^4$

3. $\frac{25}{16}-\frac{4}{9}a^2b^2y^6$

4. $\frac{9}{16}x^{2m}y^{4n}-\frac{1}{25}p^{2n-2}$

5. $(2x+1)^2-(3y+2)^2$

6. $(5x+3)^2-(2x-1)^2$

7.. $(x^3+y^3)^2-(x^3-y^3)^2$

8. $(3+x+y)^2-(2+x-y)^2$

9. $\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2-\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2$

10. $\frac{9}{49}\frac{x^4y^2}{z^6}-\frac{1}{25}\frac{a^4}{b^8}$

11. $2x-5y$

Trinomio cuadrado perfecto

1. $9x^8-48x^4y^3+64y^6$

2. $25y^{2m}-20y^mx^2+4x^4$

3. $\frac{1}{4}x^6y^2-\frac{1}{3}x^3ya^2+\frac{1}{9}a^4$

4. $9\frac{x^6}{y^2}+6x^2y+\frac{y^4}{x^2}$

5. $z^3+6z^{3/2}y^{1/4}+9y^{1/2}$

6. $4x^{2m+2}+20x^{m+1}y^{n-1}+25y^{2n-2}$

7. $p^6+10p^3a^4b+25a^8b^2$

8. $(a+b)^4-6(a+b)^2(a-b)^3+9(a-b)^6$

9. $4y^{-8}-12y^{-4}x^2+9x^4$

10. $25p^{2m+2n}x^6-20p^{m+n}y^mx^3z^n+4y^{2m}z^{2n}$

11. $9x^6+12x^3y^2+4y^4$

12. $25x^6+60x^3+36$

13. $25x^8-80x^4y^6+64y^{12}v$

14. $9x^4y^4+30x^2y^2z^4+25z^8$

Suma de cuadrados

1. a^4+4b^4

2. $4a^4y^8+16b^{12}x^{12}$

3. $\frac{1}{4}x^8+81y^8$

4. $\frac{9}{4}x^4+9y^8p^4$

5. $\frac{x^4}{b^8}+64\frac{y^{12}}{z^4}$

6. $\frac{25}{4}x^{4m}+25y^{8n}$

7. $81p^{4m+8}+4q^{8m+4}$

8. $36x^{10}+9y^{10}$

9. $\frac{49}{4}y^{16}+49x^{32}$

10. $64a^{12}+16b^{12}$

Trinomio cuadrado perfecto por adición y sustracción

1. $9x^4 + 8x^2y^2 + 4y^4$

2. $25x^8 + 51x^4 + 36$

3. $9\dfrac{x^6}{y^2} + 6x^2y$

4. $9x^8 - 52x^4y^3 + 64y^6$

5. $4x^8 - 4x^4y^8k^4 + 9y^{16}k^8$

6. $4a^8 - 21a^4b^{-4} + 25b^{-8}$

7. $9x^{-8} + 33x^{-4}y^{-8} + 49y^{-16}$

8. $4k^{24} + 8k^{12}p^{-4}y^4 + 9p^{-8}y^8$

Trinomio cuadrático

1. $3x^2 + 4x + 1$

2. $2x^2 - 9x + 10$

3. $5x^2 + 11x + 2$

4. $3x^2 - 7x - 6$

5. $6x^2 + 3x + \dfrac{1}{3}$

6. $2x^2 - 4x + \dfrac{3}{2}$

7. $4x^2 - 7x - 2$

8. $5x^2 + 14x - 3$

9. $-2x^2 + x + 4$

10. $7x^2 - 9x + 2$

11. $-2x^{2/3} + x^{1/3} + 4$

12. $40x^4 - x^2 - 6$

13. $35x^6 - 31x^3 + 6$

14. $28x + 37x^{1/2} + 12$

15. $10x^3 - 19x^{3/2} - 15$

Trinomio cuadrado perfecto y diferencia de cuadrados

1. $b^2 - 1 - 4x^2 + 4x$

2. $x^2 + 2x + 1 - k^4$

3. $4x - x^2 + 4 + y^2$

4. $a^2 - b^2 - x^2 - 2xb$

5. $x^4 - z^2 + y^2 + 2x^2y$

6. $4x^8 - 4x^4 - 9a^2 + 1$

7. $c^2 - 4k^4 + 25a^6b^2 - 10a^3bc$

8. $16p^6 - 4x^4 - 20x^2y^3 - 25y^6$

9. $2x^3y^2 + 4z^2 - x^6 - y^4$

10. $30q^2p^{-1} + 9p^{-2} - 16k^2 + 25q^4$

PRODUCTOS NOTABLES

Al multiplicar dos expresiones algebraicas el trabajo puede ser tedioso sí cada expresión consta de varios términos. Sin embargo se pueden encontrar ciertas regularidades al efectuar una multiplicación. Lo que se desea es determinar reglas generales que permitan hallar la multiplicación de dos expresiones algebraicas sin tener que realizar la multiplicación en forma explícita.

A estas reglas generales que permiten hallar el resultado de la multiplicación de expresiones algebraicas, sin tener que efectuar la multiplicación en forma explícita se les denomina Productos Notables.

Binomios conjugados

Un caso especial de producto notable es el que involucra a dos binomios, los cuales son idénticos excepto que uno es la suma y él otro la resta de los mismos términos algebraicos. En este caso se dice que los binomios son Binomios conjugados. En general se tiene que el binomio $E_1 + E_2$ *es conjugado con el binomio* $E_1 - E_2$.
Consideremos dos binomios conjugados y realicemos la multiplicación en forma explícita.

$$(E_1 + E_2)(E_1 - E_2) = E_1^{\ 2} - E_1E_2 + E_2E_1 - E_2^{\ 2} = E_1^{\ 2} - E_2^{\ 2}$$

Se puede observar que el resultado de la multiplicación es

$$(E_1 + E_2)(E_1 - E_2)$$

Esto es, se puede escribir el resultado sin tener que realizar la multiplicación.

El producto de dos binomios conjugados es igual al cuadrado del primer término menos el cuadrado del segundo termino, considerando al binomio que contiene la resta de los términos.
Esto es, se considera el binomio que contiene a la resta: $E_1 - E_2$. *En la resta* E_1 *es el primer término y* E_2 *es el segundo término.*

Ejemplo.
$$(5x^2y^3 + 6a^4b^2)(5x^2y^3 - 6a^4b^2) = (5x^2y^3)^2 - (6a^4b^2)^2 = 25x^4y^6 - 36a^8b^4$$

Ejemplo.
$$\left(\frac{3c^3}{p^4} + \frac{k^4}{b}\right)\left(\frac{3c^3}{p^4} - \frac{k^4}{b}\right) = \left(\frac{3c^3}{p^4}\right)^2 - \left(\frac{k^4}{b}\right)^2 = \frac{9c^6}{p^8} - \frac{k^8}{b^2}$$

Ejemplo.
$$(x^{1/2} - \sqrt{z})(x^{1/2} + \sqrt{z}) = (x^{1/2})^2 - (\sqrt{z})^2 = x - z$$

Fácil!, no?

Binomio cuadrado

Se puede investigar el caso cuando se multiplican dos binomios idénticos, esto es calcular un binomio cuadrado. Por comodidad indicaremos por $binomio(+)$ *al binomio que es la suma de dos términos y por* $binomio(-)$ *al binomio que es la resta de dos términos.*
$binomio(+)$

Consideremos primero el caso $binomio(+)$ *.*

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Tenemos entonces:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

En este caso se tiene que el cuadrado de un $binomio(+)$ *es igual al cuadrado del primer término, más el doble producto del primero por el segundo términos, más el cuadrado del segundo término.*

Ejemplo.

$$(6p^3x^{-2} + 7k^4y)^2 = (6p^3x^{-2})^2 + 2(6p^3x^{-2})(7k^4y) + (7k^4y)^2 = 36p^6x^{-4} + 84p^3x^{-2}k^4y + 49k^8y^2$$

Ejemplo.

$$\left(2\frac{q^3z}{b^2} + 3\frac{x^{-2}}{y^4}\right)^2 = \left(2\frac{q^3z}{b^2}\right)^2 + 2\left(2\frac{q^3z}{b^2}\right)\left(3\frac{x^{-2}}{y^4}\right) + \left(3\frac{x^{-2}}{y^4}\right)^2 = 4\frac{q^6z^2}{b^4} + 12\frac{q^3zx^{-2}}{b^2y^4} + 9\frac{x^{-4}}{y^8}$$

$binomio(-)$

Consideremos ahora el caso $binomio(-)$

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Se tiene entonces el resultado.

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

En este caso se tiene que el cuadrado de un $binomio(-)$ *es igual al cuadrado del primer término, menos el doble producto del primero por el segundo términos, más el cuadrado del segundo término.*

Ejemplo.

$$(7b^2k^2 - 2r^4z^2)^2 = (7b^2k^2)^2 - 2(7b^2k^2)(2r^4z^2) + (2r^4z^2)^2 = 49b^4k^4 - 28b^2k^2r^4z^2 + 4r^8z^4$$

Ejemplo.

$$\left(\sqrt{3}\frac{mk^3}{b^{1/2}} - \frac{4}{5}\frac{a^5}{w^4}\right)^2 = \left(\sqrt{3}\frac{mk^3}{b^{1/2}}\right)^2 - 2\left(\sqrt{3}\frac{mk^3}{b^{1/2}}\right)\left(\frac{4}{5}\frac{a^5}{w^4}\right) + \left(\frac{4}{5}\frac{a^5}{w^4}\right)^2$$

$$= 3\frac{m^2k^6}{b} - \frac{8\sqrt{3}}{5}\frac{mk^3a^5}{b^{1/2}w^4} + \frac{16}{25}\frac{a^{10}}{w^8}$$

Entonces, la regla general para determinar el cuadrado de un binomio es, el cuadrado del primer término más (ó menos, dependiendo si el binomio es una suma o resta) el doble producto del primero por el segundo términos, más el cuadrado del segundo término.

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

Binomio cúbico

Consideremos ahora el caso en que se tiene el cubo de un binomio.

$binomio(+)$

Para el caso del cubo de un $binomio(+)$ *se tiene:*

$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2 = (a+b)(a^2+2ab+b^2)$$
$$= a^3 + 2a^2b + ab^2 + ba^2 + 2ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Entonces se tiene:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Esto es, el cubo de un $binomio(+)$ *es el cubo del primer término, más el triple del cuadrado del primero por el segundo términos, más el triple del primero por el cuadrado del segundo términos, más el cubo del segundo término.*

Ejemplo.

$$(2p^2+5q^4)^3 = (2p^2)^3 + 3(2p^2)^2(5q^4) + 3(2p^2)(5q^4)^2 + (5q^4)^3$$
$$= 8p^6 + 60p^4q^4 + 150p^2q^8 + 125q^{12}$$

Entonces:

$$(2p^2+5q^4)^3 = 8p^6 + 60p^4q^4 + 150p^2q^8 + 125q^{12}$$

Ejemplo.

$$(3x^{1/2}y + 4z^{2/3})^3 = (3x^{1/2}y)^3 + 3(3x^{1/2}y)^2(4z^{2/3}) + 3(3x^{1/2}y)(4z^{2/3})^2 + (4z^{2/3})^3$$
$$= 27x^{3/2}y^3 + 108xy^2z^{2/3} + 144x^{1/2}yz^{4/3} + 64z^2$$

Se debe observar que se están aplicando reglas de exponentes.

$$(x^{1/2})^2 = x^{2/2} = x \ ; \ (z^{2/3})^2 = z^{4/3} \ ; \ (z^{2/3})^3 = z^{6/3} = z^2$$

Entonces:

$$(3x^{1/2}y + 4z^{2/3})^3 = 27x^{3/2}y^3 + 108xy^2z^{2/3} + 144x^{1/2}yz^{4/3} + 64z^2$$

$binomio(-)$

Para el caso de un $binomio(-)$ *se tiene.*

$$(a-b)^3 = (a-b)(a-b)^2 = (a-b)(a^2-2ab+b^2)$$
$$= a^3 - 2a^2b + ab^2 - ba^2 + 2ab^2 - b^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Entonces se tiene:

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Esto es, el cubo de un $binomio(-)$ es el cubo del primer término, más el triple del cuadrado del primero por el segundo términos, más el triple del primero por el cuadrado del segundo términos, más el cubo del segundo término.

Ejemplo.

$$\begin{aligned}(5w^{-3}-2p^5)^3 &= (5w^{-3})^3 - 3(5w^{-3})^2(2p^5) + 3(5w^{-3})(2p^5)^2 - (2p^5)^3 \\ &= 125w^{-9} - 150w^{-6}p^5 + 60w^{-3}p^{10} - 8p^{15}\end{aligned}$$

Entonces:

$$(5w^{-3}-2p^5)^3 = 125w^{-9} - 150w^{-6}p^5 + 60w^{-3}p^{10} - 8p^{15}$$

Ejemplo.

$$\begin{aligned}\left(4\frac{w^{-3}}{p^5} - \frac{2}{3}\frac{a^2}{b^3}\right)^3 &= \left(4\frac{w^{-3}}{p^5}\right)^3 - 3\left(4\frac{w^{-3}}{p^5}\right)^2\left(\frac{2}{3}\frac{a^2}{b^3}\right) + 3\left(4\frac{w^{-3}}{p^5}\right)\left(\frac{2}{3}\frac{a^2}{b^3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\frac{a^2}{b^3}\right)^3 \\ &= 64\frac{w^{-9}}{p^{15}} - \frac{96}{3}\frac{w^{-6}}{p^{10}}\frac{a^2}{b^3} + \frac{48}{3}\frac{w^{-3}}{p^5}\frac{a^4}{b^6} - \frac{8}{27}\frac{a^6}{b^9} = 64\frac{w^{-9}}{p^{15}} - 32\frac{w^{-6}a^2}{p^{10}b^3} + 16\frac{w^{-3}a^4}{p^5b^6} - \frac{8}{27}\frac{a^6}{b^9}\end{aligned}$$

Entonces:

$$\left(4\frac{w^{-3}}{p^5} - \frac{2}{3}\frac{a^2}{b^3}\right)^3 = 64\frac{w^{-9}}{p^{15}} - 32\frac{w^{-6}a^2}{p^{10}b^3} + 16\frac{w^{-3}a^4}{p^5b^6} - \frac{8}{27}\frac{a^6}{b^9}$$

Generalizando, se tiene entonces en general que el cubo de un binomio es igual al cubo del primer término, mas (ò menos) el triple del cuadrado del primero por el segundo, mas el triple del primero por el cuadrado del segundo, mas (ó menos) el cubo del segundo.

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

Binomios de la forma $E+a$

Es posible halla una regla general para multiplicar binomios de la forma $E+a$, donde E es un término o expresión algebraica arbitraria y a es un número real arbitrario. Esto es, efectuar productos de la forma $(E+a)\,(E+b)$. Podemos decir que los binomios de la forma $E+a$ y $E+b$ son equivalentes, ya que la única diferencia entre ellos son los términos independientes.
Si multiplicamos explícitamente $(E+a)$ por $(E+b)$:

$$(E+a)(E+b)=E^2+bE+aE+ab=E^2+(a+b)E+ab$$

Esto significa que cuando se multiplican dos binomios equivalentes el resultado es igual al cuadrado del término común, mas la suma de los términos independientes multiplicada por el término común, mas el producto de los términos independientes

Ejemplo.

$$(x+5)(x-3)=x^2+(5+(-3))x+(5)(-3)=x^2+2x-15$$

Ejemplo.

$$(4b^3c^4-8)(4b^3c^4-5)=(4b^3c^4)^2+((-8)+(-5))(4b^3c^4)+(-8)(-5)$$

$$=16b^6c^8-13(4b^3c^4)+40=16b^6c^8-52b^3c^4+40$$

Ejemplo.

$$\left(4\frac{w^{-3}}{p^5}+7\right)\left(4\frac{w^{-3}}{p^5}-5\right)=\left(4\frac{w^{-3}}{p^5}\right)^2+(7+(-5))\left(4\frac{w^{-3}}{p^5}\right)+(7)(-5)$$

$$=16\frac{w^{-6}}{p^{10}}+2\frac{w^{-3}}{p^5}-35$$

Ejemplo.

$$(\sqrt{5}a^{3/2}x^{-5}-9)(\sqrt{5}a^{3/2}x^{-5}-7)=(\sqrt{5}a^{3/2}x^{-5})^2+((-9)+(-7))(\sqrt{5}a^{3/2}x^{-5})+(-9)(-7)$$

$$=5a^{6/2}x^{-10}-16(\sqrt{5}a^{3/2}x^{-5})+63=5a^3x^{-10}-16\sqrt{5}a^{3/2}x^{-5}+63$$

Ejemplo.

$$\left(\sqrt{a^{3/2}x^{-5}}-21\right)\left(\sqrt{a^{3/2}x^{-5}}+4\right)=\left(\sqrt{a^{3/2}x^{-5}}\right)^2+((-21)+4)\left(\sqrt{a^{3/2}x^{-5}}\right)+(-21)(4)$$

$$=a^{3/2}x^{-5}-17\sqrt{a^{3/2}x^{-5}}-84\;=a^{3/2}x^{-5}-17(a^{3/2}x^{-5})^{1/2}-84$$

EJERCICIOS

Binomios cuadrados

1. $\left(4x^2y^4+7\sqrt{x^4b^3}\right)\left(4x^2y^4-7\sqrt{x^4b^3}\right)$

2. $(7a^2x^{1/4}-5y^{1/3}z^2)(7a^2x^{1/4}+5y^{1/3}z^2)$

3. $\left(z^{1/2}w^2+\frac{x^2}{y^{-2}}\right)\left(z^{1/2}w^2-\frac{x^2}{y^{-2}}\right)$

4. $\left(3\frac{a^3}{p^2}+4y^3z\right)\left(3\frac{a^3}{p^2}-4y^3z\right)$

5. $(-4z^2x^5+3z^{-4}y^2)(-4z^2x^5-3z^{-4}y^2)$

6. $(3p^4u^3-2k^3a^5)(3p^4u^3+2k^3a^5)$

Binomios $E\pm a$

1. $(x^2y+3)(x^2y+7)$

2. $(3z^3k^{-4}-4)(3z^3k^{-4}-5)$

3. $(z^{1/2}w^2-6)(z^{1/2}w^2-4)$

4. $(3p^4u^3+4)(3p^4u^3+7)$

5. $\left(7\sqrt{x^4b^3}-4\right)\left(7\sqrt{x^4b^3}-7\right)$

6. $\left(4\frac{a^3}{c^2}+5\right)\left(4\frac{a^3}{c^2}-6\right)$

Binomios cuadrados

1. $(5x^{1/2}-8y^{1/3})^2$

2. $(3x^4+4y^3z)^2$

3. $(2b^5-7a^{-1}c^2)^2$

4. $(7a^2x^{1/4}+2y^{1/3}z^{-2})^2$

5. $(3w^4u^3-2k^3z^5)^2$

6. $(-4z^2x^5+3z^{-4}y^2)^2$

Binomios cúbicos

1. $(7a^2x^{1/4}-5y^{1/3}z^2)^3$

2. $(3y^3+4y^3z)^3$

3. $(2ab^5-7a^{-1}c^2)^3$

4. $(3p^4u^3-2k^3a^5)^3$

5. $(-4z^2x^5+3z^{-4}y^2)^3$

6. $(5x^{1/2}-8y^{1/3})^3$

DESARROLLOS BINOMIALES

En muchas aplicaciones se necesita determinar el producto (multiplicación) de un binomio consigo mismo un número determinado de veces. Este tipo de binomios se representa en la forma $(a\pm b)^n$ *y se denomina Binomio de Newton. Esto es, la suma o resta de dos términos, elevada a una potencia dada.*

El binomio de Newton significa, en forma estricta, multiplicar un binomio consigo mismo tantas veces como lo indique la potencia del binomio.

$$(a \pm b)^n = \underbrace{(a \pm b)\cdot(a \pm b)\cdots(a \pm b)(a \pm b)}_{n\, veces}$$

El efectuar la multiplicación repetida del binomio puede ser un trabajo en muy laborioso, pensando en potencias mayores que 4 ó 5. Lo que se desea es, evitar efectuar en forma explicita la multiplicación del mismo binomio. Contar con un procedimiento que permita obtener el resultado de la multiplicación del binomio consigo mismo sin tener que hacer la multiplicación en forma explicita. A este proceso se le denomina desarrollo binomial.
Por ejemplo, se puede recordar como aprendimos a desarrollar un binomio cuadrado:
"El cuadrado del primer término, más ó menos, dependiendo si se trata de una suma o una resta, el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo"

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2a\cdot b + b^2$$

Hemos escrito el resultado del desarrollo del binomio, ¡sin necesidad de realizar la multiplicación!.
Existe una regla general que permite obtener el desarrollo de un binomio de cualquier orden.

Desarrollo Binomial.
Consideremos el desarrollo del binomio $(a \pm b)^n$*, donde el signo* $\pm$ *indica que se puede tener una suma o una resta en el binomio que se desea desarrollar.*
Escribamos el primer término del binomio con la potencia n (potencia del binomio), y el segundo término con la potencia cero, esto es: $a^n b^0$*.*
A partir de este término, escribamos términos equivalentes consecutivos, de tal forma que la potencia n disminuye y la potencia 0 aumenta de 1 en 1 hasta que la potencia n disminuya hasta 0 y la potencia 0 aumente hasta n.

$$a^n b^0 \quad a^{n-1}b^1 \quad a^{n-2}b^2 \quad \cdots \quad a^2 b^{n-2} \quad ab^{n-1} \quad a^0 b^n$$

Se han dejado espacios para escribir el signo y el coeficiente de cada término. El signo se determina de la siguiente forma:

- *Si el binomio consiste de la suma de los términos a y b, todos los términos del desarrollo se suman.*

$$a^n b^0 + \quad a^{n-1}b^1 + \quad a^{n-2}b^2 + \quad \cdots + \quad a^2 b^{n-2} + \quad ab^{n-1} + \quad a^0 b^n$$

- *Si el binomio consiste de una resta, el signo* $+$ *y* $-$ *se intercalan sucesivamente, de tal forma que el primer término siempre lleva el signo positivo. Esto es, el orden de los signos es* $+-+-\cdots$*.*

$$a^n b^0 - \quad a^{n-1}b^1 + \quad a^{n-2}b^2 - \cdots + (-1)^{n-2} \quad a^2 b^{n-2} + (-1)^{n-1} \quad ab^{n-1} + (-1)^n \quad a^0 b^n$$

Recordemos que $(-1)^n$ es positivo si n es un número par, y es negativo si n es impar.

Por ejemplo, para comenzar el desarrollo de un binomio que consiste de una suma, se tiene:

$$(a+b)^6 \rightarrow \quad a^6b^0 + \quad a^5b^1 + \quad a^4b^2 + \quad a^3b^3 + \quad a^2b^4 + \quad a^1b^5 + \quad a^0b^6$$

y para una resta se tiene:

$$(a-b)^7 \rightarrow \quad a^7b^0 - \quad a^6b^1 + \quad a^5b^2 - \quad a^4b^3 + \quad a^3b^4 - \quad a^2b^5 + \quad a^1b^6 - \quad a^0b^7$$

Solo falta determinar los coeficientes numéricos que acompañan a cada término. Para esto tenemos varias formas alternativas para lograrlo.

Coeficientes Binomiales.

Los coeficientes del desarrollo se pueden determinar a partir de los coeficientes binomiales. Los coeficientes binomiales son cantidades que se representan y están definidos en la forma:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

*donde se requiere que el número superior **sea mayor o igual** al número inferior*

***Nota**: Las calculadoras científicas tienen una tecla especial para determinar estas cantidades, que por lo general está etiquetada con el símbolo ${}_nC_k$.*

Cada término del desarrollo se multiplica por un coeficiente binomial, de tal forma que el número superior siempre es igual a la potencia del binomio, y el número inferior va aumentando desde 0 hasta la potencia del binomio. Para el caso del binomio de una suma se tiene:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^nb^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-2}a^2b^{n-2} + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}a^0b^n$$

Solo hay que calcular los coeficientes binomiales.

Ejemplo

$$(a-b)^7 = \binom{7}{0}a^7b^0 - \binom{7}{1}a^6b^1 + \binom{7}{2}a^5b^2 - \binom{7}{3}a^4b^3 + \binom{7}{4}a^3b^4 - \binom{7}{5}a^2b^5 + \binom{7}{6}a^1b^6 - \binom{7}{7}a^0b^7$$

Los coeficientes binomiales son:

$$\binom{7}{0}=1,\ \binom{7}{1}=7,\ \binom{7}{2}=21,\ \binom{7}{3}=35,\ \binom{7}{4}=35,\ \binom{7}{5}=21,\ \binom{7}{6}=7,\ \binom{7}{7}=1$$

De tal forma que, eliminando los unos innecesarios (a^0 $y b^0$), se obtiene el desarrollo binomial:

$$(a-b)^7 = a^7 - 7a^6b^1 + 21a^5b^2 - 35a^4b^3 + 35a^3b^4 - 21a^2b^5 + 7a^1b^6 - b^7$$

Triángulo de Pascal.

Los coeficientes del desarrollo se pueden determinar a partir del Triángulo de Pascal.
Se elige el renglón que corresponde a la potencia del binomio, y los números se colocan en el mismo orden que tienen en el triángulo.

Ejemplo

Para desarrollar el binomio $(a-b)^7$, se escoge el renglón r_7 el cual es

$$1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1$$

y se tiene que el desarrollo es

$$(a-b)^7 = 1a^7b^0 - 7a^6b^1 + 21a^5b^2 - 35a^4b^3 + 35a^3b^4 - 21a^2b^5 + 7a^1b^6 - 1a^0b^7$$

donde solo es necesario eliminar a^0 $y b^0$, para obtener el desarrollo del binomio:

$$(a-b)^7 = a^7 - 7a^6b^1 + 21a^5b^2 - 35a^4b^3 + 35a^3b^4 - 21a^2b^5 + 7a^1b^6 - b^7$$

Una regla que no se como se llama.

Se escriben los términos con las potencias y signos adecuados. Cada término ocupa una posición en el desarrollo, comenzando desde la posición 1. Para determinar los coeficientes de los siguientes términos se siguen las siguientes reglas:
Al primer término le corresponde siempre el número 1.
Para obtener los coeficientes de los demás términos, se multiplica el coeficiente del término por la potencia que va disminuyendo y se divide entre la posición que ocupa el término. El resultado es el coeficiente del siguiente término.

Ejemplo

$$(a-b)^7 = \underset{\frac{1\times7}{1}=7}{1a^7b^0} - \underset{\frac{7\times6}{2}=21}{7a^6b^1} + \underset{\frac{21\times5}{3}=35}{21a^5b^2} - \underset{\frac{35\times4}{4}=35}{35a^4b^3} + \underset{\frac{35\times3}{5}=21}{35a^3b^4} - \underset{\frac{21\times2}{6}=7}{21a^2b^5} + \underset{\frac{7\times1}{7}=1}{7a^1b^6} - 1a^0b^7$$

Al eliminar los números irrelevantes, a^0 $y b^0$, se obtiene el desarrollo del binomio:

$$(a-b)^7 = a^7 - 7a^6b^1 + 21a^5b^2 - 35a^4b^3 + 35a^3b^4 - 21a^2b^5 + 7a^1b^6 - b^7$$

Se puede observar que este proceso de desarrollo de un binomio sigue ciertas reglas generales. Lo importante es como se escriben los términos, con una potencia disminuyendo y la otra aumentando.

Estas características forman parte del Teorema del Binomio.

Teorema del Binomio.

Sean a y b dos cantidades arbitrarias y sea n un número entero positivo. Entonces:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Esta expresión indica que el desarrollo es la suma de varios términos en la forma:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^{n-0} b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 \cdots + \binom{n}{n-1} a^{n-(n-1)} b^{n-1} + \binom{n}{n-n} a^{n-n} b^n$$

Considerando que $b^0 = 1$ *y* $a^{n-n} = a^0 = 1$ *se tiene que el Teorema del Binomio toma la forma explícita desarrollada:*

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + \binom{n}{0} b^n$$

Se puede observar la particularidad de que la potencia de la cantidad a va disminuyendo desde la potencia del binomio hasta cero, y la potencia de la cantidad b va aumentando desde cero hasta la potencia del binomio.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{n-k} b^k$$

Los coeficientes que multiplican a cada término $a^{n-k}b^k$ *se denominan coeficientes binomiales, y están definidos en la forma:*

<u>Definición</u>

Sean n y k un par de números enteros positivos. Si $n \geq k$ *, se define el coeficiente binomial en la forma:*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

En la definición del coeficiente binomial se encuentran otras cantidades importantes, las cuales se denotan por $n!$. Estos números especiales se denominan números factoriales y se definen en la forma.

Definición

Para todo número entero positivo n, distinto de cero, se define él factorial de n, $n!$, en la forma:

$$n! = n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times 3\times 2\times 1$$

Esto es, el factorial de un numero n es la multiplicación de todos los números enteros positivo menores o iguales al número n dado.
Como caso muy especial, se tiene una definición operativa. El factorial del número cero es uno.

Definición

$0! = 1$

Esta definición es operativa porque no hay ninguna justificación natural, más que es necesaria.

Nota: *$n!$ se lee como "n factorial". Esto es, $5!$ se lee como "5 factorial".*

Ejemplo

$5! = 5\times 4\times 3\times 2\times 1 = 120$
$7! = 7\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1 = 5040$
$10! = 10\times 9\times 8\times 7\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1 = 3{,}628{,}800$

Se puede observar que todo número factorial satisface una relación recursiva en la forma:

$$n! = n\times(n-1)!$$

Esto es, el número factorial $n!$ se puede desarrollar en factoriales menores.

Ejemplo

$7! = 7\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1 = 7\times 6! = 7\times 6\times 5!$

El Teorema del Binomio establece ciertas reglas para efectuar el desarrollo de un binomio a una potencia entera positiva.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$= \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots \binom{n}{n-2} a^2 b^{n-2} + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{0} b^n$$

Se pueden observar características importantes en el teorema del Binomio.
La suma de las potencias de cada término es igual a la potencia del binomio. Los términos en el desarrollo están ordenados de tal forma que una potencia disminuye y la otra aumenta de uno en uno.
Lo que deseamos hacer ahora es poder desarrollar binomios de cantidades arbitrarias a y b. Esto es, desarrollo de binomios de la forma:

$$(3x^2 - 5y^5)^8$$

$$(3b^2 - 5k^5 a^{-2})^4$$

Todo lo que tenemos que hacer es seguir las reglas generales indicadas anteriormente:

Ejemplo

Deseamos hallar el desarrollo del binomio $(3b^2x^3 - 5k^5a^{-2})^5$.

Primero observamos que el primer término es $3b^2x^3$ y el segundo es $5k^5a^{-2}$. La potencia del binomio es 5. Escribimos el producto del primer término con la potencia 6 y del segundo con la potencia 0.

$$(3b^2x^3)^5(5k^5a^{-2})^0$$

A continuación escribimos términos equivalentes disminuyendo la potencia 5 hasta cero y aumentando la potencia 0 hasta 5.

$$(3b^2x^3)^5(5k^5a^{-2})^0 \quad (3b^2x^3)^4(5k^5a^{-2})^1 \quad (3b^2x^3)^3(5k^5a^{-2})^2 \quad (3b^2x^3)^2(5k^5a^{-2})^3$$

$$(3b^2x^3)^1(5k^5a^{-2})^4 \quad (3b^2x^3)^0(5k^5a^{-2})^5$$

Los espacios son reservados para los signos y coeficientes de cada término. Como se trata de una resta los signos $+ \text{ y } -$ se alternan comenzando con $+$.

$$(3b^2x^3)^5(5k^5a^{-2})^0 - \quad (3b^2x^3)^4(5k^5a^{-2})^1 + \quad (3b^2x^3)^3(5k^5a^{-2})^2 - \quad (3b^2x^3)^2(5k^5a^{-2})^3$$

$$+ \quad (3b^2x^3)^1(5k^5a^{-2})^4 - \quad (3b^2x^3)^0(5k^5a^{-2})^5$$

*Para escribir los coeficientes utilizamos cualquiera de las alternativas que tenemos. Escojamos el **triángulo de Pascal**. Necesitamos el renglón r_5. Este renglón tiene los números:*

$$r_5 \rightarrow \quad 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1$$

Colocando estos números en el mismo orden en el desarrollo anterior se tiene:

$$1(3b^2x^3)^5(5k^5a^{-2})^0 - 5(3b^2x^3)^4(5k^5a^{-2})^1 + 10(3b^2x^3)^3(5k^5a^{-2})^2 - 10(3b^2x^3)^2(5k^5a^{-2})^3$$

$$+5(3b^2x^3)^1(5k^5a^{-2})^4 - 1(3b^2x^3)^0(5k^5a^{-2})^5$$

Eliminamos los factores irrelevantes como son $(5k^5a^{-2})^0$, $(3b^2x^3)^0$ y los unos.

$$(3b^2x^3)^5 - 5(3b^2x^3)^4(5k^5a^{-2})^1 + 10(3b^2x^3)^3(5k^5a^{-2})^2$$

$$-10(3b^2x^3)^2(5k^5a^{-2})^3 + 5(3b^2x^3)^1(5k^5a^{-2})^4 - (5k^5a^{-2})^5$$

Ahora se eliminan todos los paréntesis de cada término, aplicando la regla distributiva de las potencias: Recordemos que al aplicar la propiedad distributiva de los exponentes, el exponente "entra" y multiplica a todas las potencias que se encuentran "dentro del paréntesis".

$$3^5b^{10}x^{15} - 5\cdot 3^4b^8x^{12}5k^5a^{-2} + 10\cdot 3^3b^6x^9 5^2k^{10}a^{-4} - 10\cdot 3^2b^4x^6 5^3k^{15}a^{-6} + 5\cdot 3b^2x^3 5^4k^{20}a^{-8} - 5^5k^{25}a^{-10}$$

Por último se calculan las potencias de los números indicadas y se acomodan términos y se tiene entonces que $(3b^2x^3 - 5k^5a^{-2})^5$ es igual a:

$$243b^{10}x^{15} - 2025b^8x^{12}k^5a^{-2} + 6750b^6x^9 5^2k^{10}a^{-4} - 11250b^4x^6k^{15}a^{-6} + 6250b^2x^3k^{20}a^{-8} - 3125k^{25}a^{-10}$$

¡Y ya! Hemos terminado. Bonito, no?

Ejemplo

Hagamos otro ejemplito.
Desarrollemos $(2x^{1/2} - 7y^2w^{-1/4})^4$
Escribimos el producto del primer término (con la potencia 4), y del segundo (con la potencia 0).
$(2x^{1/2})^4(7y^2w^{-1/4})^0$

Escribimos los siguientes términos con las potencias adecuadas disminuyendo y aumentando respectivamente.

$$(2x^{1/2})^4(7y^2w^{-1/4})^0 \quad (2x^{1/2})^3(7y^2w^{-1/4})^1 \quad (2x^{1/2})^2(7y^2w^{-1/4})^2(2x^{1/2})^1(7y^2w^{-1/4})^3 \quad (2x^{1/2})^0(7y^2w^{-1/4})^4$$

Como se trata del binomio de una suma, todos los términos son positivos o se suman.

$$(2x^{1/2})^4(7y^2w^{-1/4})^0 + (2x^{1/2})^3(7y^2w^{-1/4})^1 + (2x^{1/2})^2(7y^2w^{-1/4})^2 + (2x^{1/2})^1(7y^2w^{-1/4})^3 + (2x^{1/2})^0(7y^2w^{-1/4})^4$$

Escribimos o calculamos los coeficientes.
*Usemos ahora la **reglita desconocida**. El primer término tiene un coeficiente 1.*

$$1(2x^{1/2})^4(7y^2w^{-1/4})^0$$

Multiplicamos el coeficiente 1 por la potencia 4 y dividimos entre la posición del término, que es la 1. Se obtiene como resultado el coeficiente del segundo término 4.

$$1(2x^{1/2})^4\underset{\frac{1\times4}{1}=4}{(7y^2w^{-1/4})^0} + 4(2x^{1/2})^3\underset{\frac{4\times3}{2}=6}{(7y^2w^{-1/4})^1} + 6(2x^{1/2})^2\underset{\frac{6\times2}{3}=4}{(7y^2w^{-1/4})^2}$$
$$+\ 4(2x^{1/2})^1\underset{\frac{4\times1}{1}=1}{(7y^2w^{-1/4})^3} + 1(2x^{1/2})^0(7y^2w^{-1/4})^4$$

Se eliminan los términos $(7y^2w^{-1/4})^0$ *y* $(2x^{1/2})^0$*, ya que son equivalentes a un 1 multiplicativo.*

$$(2x^{1/2})^4 + 4(2x^{1/2})^3(7y^2w^{-1/4})^1 + 6(2x^{1/2})^2(7y^2w^{-1/4})^2 + 4(2x^{1/2})^1(7y^2w^{-1/4})^3 + (7y^2w^{-1/4})^4$$

Se aplica la propiedad distributiva de los exponentes.

$$2^4x^{4/2} + 4\cdot2^3x^{3/2}7y^2w^{-1/4} + 6\cdot2^2x^{2/2}7^2y^4w^{-2/4} + 4\cdot2x^{1/2}7^3y^6w^{-3/4} + 7^4y^8w^{-4/4}$$

Se calcula la potencia de los números indicados, y se obtiene el desarrollo:

$$(2x^{1/2} - 7y^2w^{-1/4})^4 = 61x^2 + 224x^{3/2}y^2w^{-1/4} + 1176xy^4w^{-1/2} + 2744x^{1/2}y^6w^{-3/4} + 2401y^8w^{-1}$$

EJERCICIOS

Determinar el desarrollo de los binomios indicados. Se recomienda utilizar en cada ejercicio todos los métodos estudiados.

1. $(3a^{-2}b^3 - 2x^4)^6$

2. $(5y^3 + 7x^5z^2)^7$

3. $(3ab + 4cw^3)^5$

4. $(-4x^3 + 5y^4)^4$

5. $(9z^3a^2 - 2x^3)^6$

6. $(2x - 3y)^{10}$

TRIANGULO DE PASCAL

El Triangulo de Pascal es una poderosa herramienta matemática que tiene la simpleza de lo bello. Es un arreglo de números enteros positivos en forma triangular, el cual sigue un orden establecido por reglas especiales, simples y bellas. Los números se acomodan en renglones.

La construcción del Triángulo de Pascal sigue las siguientes reglas:

a. *Los renglones se numeran a partir del renglón cero. Esto es, se tienen el renglón cero,* r_0*, el renglón uno,* r_1*, etc. Los renglones los denotaremos por* $r_0, r_1, r_2, r_3, \ldots$.
b. *El renglón* k *tiene* $k+1$ *elementos. Esto es, el renglón* r_0 *tiene 1 elemento, el renglón* r_1 *tiene 2 elementos, el renglón* r_2 *tiene tres elementos, etc.*
c. *Cada renglón comienza y termina con el número 1. Esto significa que el renglón* r_0 *solo contiene al número 1 y el renglón* r_1 *contiene a dos números. Esto es, el renglón* r_1 *comienza con el 1 y termina con el 1.*
d. *Cada número en un renglón* r_k *ocupa una posición a partir de la posición cero, hasta la posición* $k+1$.

La forma en que se construyen los siguientes renglones a partir del renglón r_2 *es de la siguiente manera:*
Cada renglón comienza y termina con el número 1, y los números intermedios son la suma de los números inmediatos superiores. Esto es:
El renglón cero, r_0*, solo contiene al número 1*

$$r_0 \to 1$$

El renglón 1, r_1*, contiene dos veces al uno.*

$$r_1 \to 1 \quad 1$$

El renglón 2, r_2, contiene a los números $1,\ 2=1+1,\ 1$.

$$r_2 \to 1 \quad 2 \quad 1$$

El renglón 3, r_3, contiene a los números $1,\ 3=1+2,\ 3=2+1,\ 1$.

$$r_3 \to 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1$$

El renglón 4, r_4, contiene los números $1,\ 4=1+3,\ 6=3+3,\ 4=3+1,1$

$$r_4 \to 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1$$

El renglón 5, r_5, contiene los números $1,\ 5=1+4,\ 10=4+6,\ 10=6+4,\ 5=4+1,\ 1$

$$r_5 \to 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1$$
$$\vdots$$

Así, sucesivamente.

Se debe de observar que el triángulo de Pascal posee una simetría interesante. Los elementos del mismo renglón n que están en las posiciones k y $n-k$ son iguales. Esto es, si se leen los números en un mismo renglón, de izquierda a derecha y de derecha a izquierda, al mismo tiempo, se notará que son ¡iguales!.

Por ejemplo, para el 5to renglón $n=5$, se tiene:

$$\underset{0}{1} \quad \underset{1}{5} \quad \underset{2}{10} \quad \underset{5-3}{10} \quad \underset{5-4}{5} \quad \underset{5-5}{1}$$

donde los números en la parte inferior indican la posición relativa del elemento.

La estructura del Triángulo de Pascal hasta el renglón doce tiene la forma siguiente:

Triángulo de Pascal.

$$
\begin{array}{l c}
r_0 \rightarrow & 1 \\
r_1 \rightarrow & 1 \quad 1 \\
r_2 \rightarrow & 1 \quad 2 \quad 1 \\
r_3 \rightarrow & 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
r_4 \rightarrow & 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
r_5 \rightarrow & 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
r_6 \rightarrow & 1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
r_7 \rightarrow & 1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1 \\
r_8 \rightarrow & 1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1 \\
r_9 \rightarrow & 1 \quad 9 \quad 36 \quad 84 \quad 126 \quad 126 \quad 84 \quad 36 \quad 9 \quad 1 \\
r_{10} \rightarrow & 1 \quad 10 \quad 45 \quad 120 \quad 210 \quad 252 \quad 210 \quad 120 \quad 45 \quad 10 \quad 1 \\
r_{11} \rightarrow & 1 \quad 11 \quad 55 \quad 165 \quad 330 \quad 462 \quad 462 \quad 330 \quad 165 \quad 55 \quad 11 \quad 1 \\
r_{12} \rightarrow & 1 \quad 12 \quad 66 \quad 220 \quad 495 \quad 792 \quad 924 \quad 792 \quad 495 \quad 220 \quad 66 \quad 12 \quad 1 \\
 & \vdots
\end{array}
$$

Es posible introducir una notación para representar cada elemento en el triángulo de pascal. Esta notación es:

$$p_{n,m}$$

donde n indicara el renglón, y m la posición dentro del renglón. Por ejemplo, el elemento que esta en el renglón 7 y en la posición 5 es $p_{7,5} = 21$*, el elemento en el renglón 5 y en la posición 2 es* $p_{5,2} = 10$.

Existen ciertas cantidades denominadas coeficientes binomiales, los cuales se denotan en la forma

$$ {}_nC_m ,\ C_m^n \text{ ó } \binom{n}{m} $$

Estos coeficientes binomiales se definen en la forma:

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

donde n, y m son números enteros positivo, y $n!$ *el factorial del número n, el cual se define en la forma:*

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1$$

Bueno, lo importante de estas cantidades es que son exactamente iguales a los elementos del triángulo de pascal al considerar el renglón y la posición del elemento. Esto es:

$$\binom{n}{m} = p_{n,m}$$

Por ejemplo.

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{120}{6\times 2} = \frac{120}{12} = 10$$

$$p_{5,3} = 10$$

esto implica que:

$$\binom{5}{3} = p_{5,3}$$

POLINOMIOS

Los términos algebraicos que constan de una literal elevada a una potencia son elementos básicos para generar otro tipo de cantidades o expresiones algebraicas. A estos términos les llamaremos términos elementales.
Estos términos juegan un papel muy importante en las matemáticas, ya que son la base para generar objetos más generales. Por ejemplo, el conjunto de términos algebraicos elementales

$$B = \{1, x, x^2, x^3, x^4, x^5, \ldots\}$$

forma una base para los desarrollos en serie de funciones, como es la Serie de Taylor.

Definición

*Un **Polinomio** es la expresión algebraica que consiste en la combinación lineal de un número finito de términos elementales x^n.*
Por combinación lineal se entiende la suma o resta de términos elementales con coeficientes reales arbitrarios.

Ejemplo

$$7x^4 + 5x^3 - 2x + 1$$
$$-4y^6 + 7y^5 - 3y^4 - 2y^3 + 9y^2 - 4y + 6$$

*Todo polinomio se caracteriza por la potencia más alta que contienen sus términos, y por la literal que define a los términos elementales. A esta potencia máxima se le denomina “**orden**” del polinomio.*

Entonces un polinomio es una expresión algebraica que consiste de la suma y/o resta de términos algebraicos ax^n, donde n es una potencia y a es un coeficiente numérico arbitrario. Debido a que los polinomios constan de términos algebraicos del tipo ax^n, la forma natural de escribir un polinomio es ordenando los términos desde la potencia mayor a la potencia menor.

*Los polinomios se pueden denotar por la expresión $P_n(x)$, donde el subíndice n denota el **orden** del polinomio y x denota la literal respecto a la cual se ordena el polinomio. Entonces $P_n(x)$ denota un polinomio de orden n respecto a x. De esta forma se tiene:*

$P_4(x) = 7x^4 + 5x^3 - 2x + 1$ *es un polinomio de orden 4 respecto a x,*
$P_6(x) = -4y^6 + 7y^5 - 3y^4 - 2y^3 + 9y^2 - 4y + 6$ *es un polinomio de orden 6 respecto a y.*
$P_5(z) = 3z^5 + 4z^4 - 7z^2$ *es un polinomio de orden 5 respecto a z.*

Un polinomio importante y muy simple es el polinomio cero, $O(x) = 0$, en el cual el coeficiente de cada uno de sus términos es cero.

Los polinomios se pueden combinar para obtener nuevos polinomios. La forma en que se combinan los polinomios es mediante las operaciones básicas de los números reales. Entonces es posible sumar, restar, multiplicar y dividir polinomios para obtener nuevos polinomios. Al conjunto de operaciones que es posible efectuar entre polinomios, y al conjunto de propiedades que estas operaciones tienen se le denomina Álgebra de Polinomios.

Una de las propiedades más importantes que toda operación debe de satisfacer es la propiedad de Cerradura. Esta establece que si dos cantidades del mismo tipo se combinan mediante una operación el resultado debe de ser una cantidad del mismo tipo.
Entonces, si se combinan dos polinomios mediante una operación el resultado debe de ser un polinomio.

Una forma útil para efectuar operaciones entre polinomios es escribir el polinomio ordenado, y cuando no aparece uno de los términos escribir un 0 ó dejar un espacio en blanco.

No aparece el término cuadrático x^2

$$2x^6 - 5x^5 - 7x^4 + 5x^3 + 0 - 3x + 9$$

No aparecen los términos x^4 *y* x^2
$4x^6 - 9x^5 + 0 + 5x^3 + 0 - 3x + 9$

Para representar a los distintos polinomios utilizaremos la notación
$p_s : P_n(x)$
donde s indica el número del polinomio. Esto es el polinomio número s esta definido por $P_n(x)$.

Ejemplo
$p_1 : 4x^6 + 7x^5 + 3x^3 - 5x + 9$

El polinomio número 1, p_1*, esta dado por* $P_6(x) = 4x^6 + 7x^5 + 3x^3 - 5x + 9$

PRODUCTO POR UN ESCALAR

Un polinomio se puede multiplicar por un número arbitrario, al cual se le denomina escalar. Al multiplicar un polinomio por un escalar cada uno de sus términos queda multiplicado por el escalar. Pero el escalar solo multiplica al coeficiente numérico de cada término.

Ejemplo

Consideremos el polinomio $p_1 : 2x^6 - 5x^5 - 7x^4 + 5x^3 + 3x + 9$ *y multipliquémoslo por 7.*

$7p_1 : (7\times 2)x^6 - (7\times 5)x^5 - (7\times 7)x^4 + (7\times 5)x^3 + (7\times 3)x + (7\times 9)$

El resultado es entonces:
$7p_1 : 14x^6 - 35x^5 - 49x^4 + 35x^3 + 21x + 63$

Ejemplo

Multiplicar el polinomio p_2 *por* -3*, donde* p_2 *esta dado por*
$p_2 : 7w^4 + 5w^3 - 2w^2 + 3w^5 + 5w^6 - 2w + 7$

La multiplicación por -3 *es:*
$-3p_2 : -21w^4 - 15w^3 + 6w^2 - 9w^5 - 15w^6 + 6w - 21$

y al ordenar el polinomio se obtiene:
$-3p_2 : -15w^6 - 9w^5 - 21w^4 - 15w^3 + 6w^2 + 6w - 21$

SUMA Y RESTA DE POLINOMIOS

Dos polinomios se pueden sumar o restar, simplemente sumando o restando aquellos términos que son semejantes. Al sumar o restar dos polinomios se obtiene un polinomio cuyo orden es el mayor orden de los polinomios dados.

$P_n(x) \pm P_m(x) = P_s(x)$

donde s es el mayor de los números n y m.

Ejemplo

Considerando los polinomios p_1 *y* p_2, *hallar* $p_1 + p_2$.

$p_1 : 2x^6 - 5x^5 - 7x^4 + 5x^3 + 3x + 9$

$p_2 : 7x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 2x^2 - 8$

La suma se efectúa en forma tabular para aprovechar los términos semejantes.

$$p_1 + p_2 :\rightarrow + \begin{array}{l} p_1 : 2x^6 - 5x^5 - 7x^4 + 5x^3 \qquad + 3x + 9 \\ p_2 : \underline{\qquad 7x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 2x^2 \qquad - 8} \end{array}$$

$$p_1 + p_2 : 2x^6 + 2x^5 - 4x^4 \qquad - 2x^2 + 3x + 1$$

Ejemplo

Considerando los polinomios p_1 *y* p_2, *hallar* $3p_1 - 4p_2$

$p_1 : 3z^5 + 5z^4 - 2z^3 + 4z^2 + z - 1$

$p_2 : 6z^5 + 2z^4 + 4z^3 - 2z^2 + 7z - 8$

$$3p_1 - 4p_2 : - \begin{array}{l} 3p_1 : \quad 9z^5 + 15z^4 - 6z^3 + 12z^2 + 3z - 3 \\ \underline{4p_2 : \quad 24z^5 + 8z^4 + 16z^3 - 8z^2 + 28z - 32} \end{array}$$

$$3p_1 - 4p_2 : -15z^5 + 7z^4 - 22z^3 + 20z^2 - 25z + 29$$

Hay que notar que al efectuar la resta de los polinomios, el signo negativo afecta a todos los términos del segundo polinomio. Por ejemplo, al restar los términos semejantes $9z^5$ *y* $24z^5$ *se tiene*

$9z^5 - 24z^5 = -15z^5$

Y al restar los términos $12z^2$ *y* $-8z^2$ *se tiene*

$12z^2 - (-8z^2) = 12z^2 + 8z^2 = 20z^2$

Ejemplo

Considerando los polinomios p_1 *y* p_2*, hallar* $-2p_1 - 3p_2$

$p_1 : -3a^5 + 5a^4 - 3a^2 - 7a$

$p_2 : -6a^5 + 16a^3 - 8a^2 - 4a + 2$

La operación esta dada en la forma:

$$
\begin{array}{rl}
 & -2p_1 : 6a^5 - 10a^4 \qquad\qquad + 6a^2 + 14a \\
-2p_1 - 3p_2 : + & -3p_2 : 18a^5 \qquad - 48a^3 + 24a^2 + 12a - 6 \\
\hline
 & -2p_1 - 3p_2 : 24a^5 - 10a^4 - 48a^3 + 30a^2 + 26a - 6
\end{array}
$$

Se debe de observar que la operación original $-2p_1 - 3p_2$ *se transformó a la operación* $-2p_1 + (-3p_2)$ *en la cual el polinomio* p_2 *se multiplico por* -3 *y en realidad se realizo la suma de* $-2p_1$ *con* $-3p_2$*. Esto es con el fin de que el signo negativo de la resta se distribuya en el segundo polinomio, y así evitar posibles problemas con este signo.*

MULTIPLICCION DE POLINOMIOS

Dos polinomios se pueden multiplicar entre sí para obtener otro polinomio. El polinomio obtenido tiene un orden que es igual a la suma del orden de cada uno de los polinomios dados. Si $P_n(x)$ *y* $P_m(x)$ *son dos polinomios su producto es un polinomio respecto a la misma literal en la forma:*

$$P_{n+m}(x) = P_n(x) \cdot P_m(x)$$

La multiplicación de polinomios se base en al propiedad distributiva de la multiplicación de los números reales. Esta propiedad determina la forma en que un término se distribuye a través de la suma o resta de dos términos.

$$a \cdot (b \pm c) = a \cdot b \pm a \cdot c$$

Esto es, el término a multiplica a cada uno de los términos de la suma o resta, respetando la operación involucrada. Al generalizar esta propiedad se puede establecer que al multiplicar dos expresiones cada término de una expresión multiplica a todos los términos de la segunda expresión.

$$(a+b)\cdot(c+d)=a\cdot(c+d)+b\cdot(c+d)=a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d$$

La multiplicación de dos polinomios se realiza aplicando la propiedad distributiva de la multiplicación, en la cual cada término de un primer polinomio multiplica a todos los términos de un segundo polinomio. Al multiplicar dos polinomios se deben de multiplicar términos elementales de la forma ax^n y bx^m, por lo que el proceso consiste en multiplicar los coeficientes numéricos y sumar las potencias.

$$ax^n\cdot bx^m=ab\,x^{n+m}$$

Ejemplo

Para los polinomios p_1 y p_2 dados determinar el producto p_1p_2.

$$p_1=3x^3-4x^2-5$$
$$p_2=2x^3+3x^2-5x$$

$$\begin{aligned}(3x^3-4x^2-5)(2x^3+3x^2-5x)&=3x^3(2x^3+3x^2-5x)-4x^2(2x^3+3x^2-5x)-5(2x^3+3x^2-5x)\\&=(3x^3)(2x^3)+(3x^3)(3x^2)+(3x^3)(-5x)+(-4x^2)(2x^3)+(-4x^2)(3x^2)+(-4x^2)(-5x)\\&\quad+(-5)(2x^3)+(-5)(3x^2)+(-5)(-5x)\\&=6x^6+9x^5-15x^4-8x^5-12x^4+20x^3-10x^3-15x^2+25x\\&=6x^6+x^5-27x^4+10x^3-15x^2+25x\end{aligned}$$

Se puede observar que el proceso de multiplicación implica multiplicar "todos contra todos", y posteriormente identificar y simplificar términos semejantes.

Hay una forma alterna de realizar y escribir la multiplicación de polinomios en la cual los resultados se escriben en columnas de términos semejantes, y el proceso es parecido a la multiplicación de números reales.

Ejemplo

Multiplicar los polinomios p_1 y p_2 dados.

$$p_1: 2y^4+5y^3-3y^2-7y-2$$
$$p_2: 5y^2-4y+5$$

Se escriben los dos polinomios ordenados, uno debajo del otro.

$$\begin{array}{rr} & 2y^4+5y^3-3y^2-7y-2\\ \times & 5y^2-4y+5\\ \hline \end{array}$$

Se toma el primer término del segundo polinomio $5y^2$ *y se multiplica por todos los términos del primer polinomio, y los resultados se escriben ordenados en un renglón.*

$$\begin{array}{rrrrrrrr}
 & & & 2y^4 & +5y^3 & -3y^2 & -7y & -2 \\
\times & & & & & 5y^2 & -4y & +5 \\ \hline
 & 10y^6 & +25y^5 & -15y^4 & -35y^3 & -10y^2 & &
\end{array}$$

Se continúa, y se multiplican todos los términos del primer polinomio por el segundo término, $-4y$, *del segundo polinomio. Los resultados se escriben en un segundo renglón, pero cada término se acomoda en la columna de términos semejantes que le corresponde.*

$$\begin{array}{rrrrrrrr}
 & & & 2y^4 & +5y^3 & -3y^2 & -7y & -2 \\
\times & & & & & 5y^2 & -4y & +5 \\ \hline
 & 10y^6 & +25y^5 & -15y^4 & -35y^3 & -10y^2 & & \\
 & & -8y^5 & -20y^4 & +12y^3 & +28y^2 & +8y &
\end{array}$$

Se continúa, y se multiplican todos los términos del primer polinomio por el tercer término, 5, *del segundo polinomio. Los resultados se escriben en un tercer renglón, acomodados en la columna de términos semejantes que les corresponda.*

$$\begin{array}{rrrrrrrr}
 & & & 2y^4 & +5y^3 & -3y^2 & -7y & -2 \\
\times & & & & & 5y^2 & -4y & +5 \\ \hline
 & 10y^6 & +25y^5 & -15y^4 & -35y^3 & -10y^2 & & \\
 & & -8y^5 & -20y^4 & +12y^3 & +28y^2 & +8y & \\
 & & & 10y^4 & +25y^3 & -15y^2 & -35y & -10
\end{array}$$

Al final solo se suman los términos semejantes en cada columna.

$$\begin{array}{rrrrrrrr}
 & & & 2y^4 & +5y^3 & -3y^2 & -7y & -2 \\
\times & & & & & 5y^2 & -4y & +5 \\ \hline
 & 10y^6 & +25y^5 & -15y^4 & -35y^3 & -10y^2 & & \\
 & & -8y^5 & -20y^4 & +12y^3 & +28y^2 & +8y & \\
 & & & 10y^4 & +25y^3 & -15y^2 & -35y & -10 \\ \hline
 & 10y^6 & +17y^5 & -25y^4 & +2y^3 & +3y^2 & -27y & -10
\end{array}$$

Ejemplo

Realizar la operación de multiplicación de p_1 con p_2.

$$p_1 = -2x^4 + 5x^3 + 2x^2 + 7 \quad ; \quad p_2 = 3x^3 + 5x - 2$$

Se debe de observar que en el polinomio 1 no aparece el término lineal, y en el 2 no aparece el término cuadrático, por lo que al acomodar los polinomios se ha colocado un coeficiente 0.

$$\begin{array}{rrrrrrrrr}
 & & & -2x^4 & +5x^3 & +2x^2 & +0x & +7 & \\
\times & & & & 3x^3 & +0x^2 & +5x & -2 & \\
\hline
-6x^7 & +15x^6 & +6x^5 & +0x^4 & +21x^3 & & & & \\
 & 0x^6 & -10x^5 & +25x^4 & +10x^3 & +0x^2 & +35x & & \\
 & & & 4x^4 & -10x^3 & -4x^2 & +0x & -14 & \\
\hline
-6x^7 & +15x^6 & -4x^5 & +29x^4 & +21x^3 & -4x^2 & +35x & -14 &
\end{array}$$

Cuando se realiza la multiplicación del término $0x^2$ por todos los términos del primer polinomios se obtiene como resultado términos con coeficiente 0, por lo que se escribe un 0 simbólico, $0x^6$, y se escriben a continuación los resultados de la multiplicación del término, $5x$, con los términos del primer polinomio.

DIVISION DE POLINOMIOS

Cuando se dividen dos números es posible que se obtenga un número entero como resultado. Esto significa que cuando se realiza la división de los números en el último paso se obtiene cero En este caso se dice que la división es exacta. Pero en el caso cuando la división de dos números proporciona un resultado que es una fracción (número con cifras decimales), se dice que la división es inexacta.

El proceso de división de polinomios involucra a varios tipos de elementos, y cada uno tiene un significado especial. La división de polinomio se puede representar en la forma:

$$\frac{P_n(x)}{P_m(x)} = C_{n-m}(x) + \frac{R_s(x)}{P_m(x)}$$

o equivalentemente en la forma más adecuada:

$$\begin{array}{rl} & C_{n-m}(x) \\ P_m(x) & \overline{\big)\, P_n(x)} \\ & \vdots \\ & R_s(x) \end{array}$$

Al polinomio $P_n(x)$ se le denomina Dividendo, y al polinomio $P_m(x)$ se le denomina Divisor. De tal forma que se divide $P_n(x)$ entre $P_m(x)$. Es importante recalcar que el orden del Dividendo debe ser mayor o al menos igual al orden del divisor. En caso contrario no se puede efectuar la división de polinomios. Al polinomio $C_{n-m}(x)$ se le denomina Cociente y es el resultado de la división, y al polinomio $R_s(x)$ se le denomina Residuo.

Si la división de los polinomios es exacta se tiene que el Residuo es el polinomio 0. En este caso se tiene que

$$P_n(x) = P_m(x)C_{n-m}(x)$$

En el caso en que la división no sea exacta el Residuo es un polinomio de orden menor que el orden del divisor, y en este caso se tiene

$$P_n(x) = P_m(x)C_{n-m}(x) + R_s(x),$$

Donde $s < m$.

El proceso general para dividir dos polinomios es el siguiente.

Se divide el término con la potencia mayor del dividendo entre el término con la potencia mayor del divisor, y el resultado es el primer término del cociente. Este término se multiplica por cada uno de los términos del divisor y los resultados se le restan al dividendo. El resultado de la resta es el nuevo dividendo. Se repite el proceso hasta que se obtenga un dividendo que sea el polinomio 0, en cuyo caso la división es exacta, o cuyo orden sea menor que el orden del divisor, y se tiene que la división no es exacta.

En el ejemplo siguiente se describe con todo detalle el proceso de división de polinomios.

Ejemplo

Dividir el polinomio p_1 entre el polinomio p_2, donde los polinomios están dados por:

$$p_1 = 10y^6 + 17y^5 - 25y^4 + 2y^3 + 3y^2 - 27y - 10$$

$$p_2 = 2y^4 + 5y^3 - 3y^2 - 7y - 2$$

Se escriben el dividendo y el divisor ordenados, desde la potencia más alta a la más baja, y si no hay algún término particular se coloca el término con un coeficiente 0.

$$2y^4+5y^3-3y^2-7y-2 \;\big|\; 10y^6+17y^5-25y^4+2y^3+3y^2-27y-10$$

Se divide el primer término del denominador $10y^6$ *entre el primer término del divisor* $2y^4$.

$$\frac{10y^6}{2y^4}=5y^2$$

el resultado es el primer término del cociente.

$$\begin{array}{r|l} & 5y^2 \\ \hline 2y^4+5y^3-3y^2-7y-2 & 10y^6+17y^5-25y^4+2y^3+3y^2-27y-10 \end{array}$$

El resultado obtenido de la división se multiplica por cada uno de los términos del divisor, y los resultados se escriben en la columna correspondiente de términos semejantes, con los signos contrarios.

$$\begin{array}{r|l} & 5y^2 \\ \hline 2y^4+5y^3-3y^2-7y-2 & 10y^6+17y^5-25y^4+2y^3+3y^2-27y-10 \\ & -10y^6-25y^5+15y^4+35y^3+10y^2 \end{array}$$

Se suman los términos semejantes de las columnas, y se obtiene un nuevo polinomio, al que denominamos nuevo dividendo.

$$\begin{array}{r|l} & 5y^2 \\ \hline 2y^4+5y^3-3y^2-7y-2 & 10y^6+17y^5-25y^4+2y^3+3y^2-27y-10 \\ & -10y^6-25y^5+15y^4+35y^3+10y^2 \\ \hline & \qquad -8y^5-10y^4+37y^3+13y^2-27y-10 \end{array}$$

Se repite el procedimiento con el nuevo dividendo obtenido. Se divide el término $-8y^5$ *entre el término* $2y^4$ *del divisor.*

$$\frac{-8y^5}{2y^4}=-4y$$

El resultado es el siguiente término del cociente. Este resultado multiplica a cada término del divisor y los resultados se colocan de nuevo en las columnas correspondientes de términos semejantes con lo signos contrarios. Se realiza la suma de términos semejantes por columnas y se obtiene un nuevo dividendo.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 5y^2-4y \\ \hline
2y^4+5y^3-3y^2-7y-2 & 10y^6+17y^5-25y^4+2y^3+3y^2-27y-10 \\
 & \underline{-10y^6-25y^5+15y^4+35y^3+10y^2} \\
 & \qquad -8y^5-10y^4+37y^3+13y^2-27y-10 \\
 & \qquad \underline{+8y^5+20y^4-12y^3-28y^2-8y} \\
 & \qquad\qquad +10y^4+25y^3-15y^2-35y-10
\end{array}
$$

Se repite ahora el proceso dividiendo el término $10y^4$ *entre* $2y^4$*, para obtener como resultado 5. Este resultado se multiplica otra vez por todos los términos del divisor, los términos obtenidos se escriben en las columnas correspondientes con los signos contrarios y se suman los términos semejantes.*

$$
\begin{array}{r|l}
 & 5y^2-4y+5 \\ \hline
2y^4+5y^3-3y^2-7y-2 & 10y^6+17y^5-25y^4+2y^3+3y^2-27y-10 \\
 & \underline{-10y^6-25y^5+15y^4+35y^3+10y^2} \\
 & \qquad -8y^5-10y^4+37y^3+13y^2-27y-10 \\
 & \qquad \underline{+8y^5+20y^4-12y^3-28y^2-8y} \\
 & \qquad\qquad +10y^4+25y^3-15y^2-35y-10 \\
 & \qquad\qquad \underline{-10y^4-25y^3+15y^2+35y+10} \\
 & \qquad\qquad\quad 0+0+0+0+0
\end{array}
$$

En este caso se obtiene el polinomio cero como el último dividendo, por lo que la división es exacta.

$$\frac{10y^6+17y^5-25y^4+2y^3+3y^2-27y-10}{2y^4+5y^3-3y^2-7y-2}=5y^2-4y+5$$

Ejemplo

Para los polinomios dados, dividir el polinomio p_1 *entre el polinomio* p_2 *dados a continuación.*

$$p_1=6x^5+5x^4-12x^3-2x^2+8x-3$$
$$p_2=2x^3+x^2-3x+1$$

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad 3x^2+x-2 \\
\hline
2x^3+x^2-3x+1 & \quad 6x^5+5x^4-12x^3-2x^2+8x-3 \\
 & \underline{-6x^5-3x^4+9x^3-3x^2} \\
 & \qquad\qquad 2x^4-3x^3-5x^2+8x-3 \\
 & \qquad\quad \underline{-2x^4-\ x^3+3x^2-\ x} \\
 & \qquad\qquad\qquad -4x^3-2x^2+7x-3 \\
 & \qquad\qquad\qquad\ \underline{4x^3+2x^2-6x+2} \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad x+1
\end{array}
$$

En este caso se obtiene un dividendo que es un polinomio cuyo orden es menor que el orden del divisor, por lo que la división no es exacta y el residuo es $x+1$*. Entonces se tiene que se satisface la relación:*

$$6x^5+5x^4-12x^3-2x^2+8x-3 = (2x^3+x^2-3x+1)(3x^2+x-2)+x-1$$

Esto es, se satisface la relación:

$$P_n(x)=P_m(x)C_{n-m}(x)+R_s(x)$$

EJERCICIOS

Para los polinomios dados, determinar las operaciones indicadas.

$p_1=4x^5-3x^2+2x^3-1$

$p_2=7-4x^4+9x^5-2x-3x^6$

$p_3=5x^6+5x^4-2x^3-3+6x$

$p_4=4x^2-3x^5-8x^3+7-x$

1. $p_1+p_2-p_3$

2. $p_4-p_3+p_2-p_1$

3. $2p_1-5p_3$

4. $6p_2-2p_4-3p_1$

5. $p_1p_2-p_3p_4$

6. $p_2-p_3-p_4+2p_2$

7. $5p_2-8p_3+p_2+7p_3$

Determinar el producto de los polinomios indicados.

1. $3x^4-2x^2+5x$ *por* $3x^2-1$

2. $5p^3-2p^4-2$ *por* $2p^3+5$

3. $6T^{2m}+5T^{2m+1}-2T^{2m-2}$ *por* $2T-4T^{3}$
4. $\frac{1}{2}x^{3}+2x^{2}-5x+\frac{1}{5}$ *por* $3x^{2}+\frac{1}{2}$
5. $7-4x^{4}+9x^{5}-2x-3x^{6}$ *por* $3x^{4}-2x^{2}+5x$
6. $5x^{6}+5x^{4}-2x^{3}-3+6x$ *por* $5x^{2}-2x-6$

Hallar el cociente (división) de los polinomios indicados

1. $6x^{7}+2x^{3}-7x^{5}+10x^{2}-5$ *entre* $2x^{2}-1$
2. $3x^{m+2}-6x^{m-2}+14x^{m-1}-x^{m}+x^{m+1}$ *entre* $x^{2}+2x-1$
3. $p^{6}-2p^{5}+8p-10p^{2}+3p^{4}$ *entre* $p^{3}-2p$
4. $8y-10y^{2}+3y^{4}+y^{6}-2y^{5}$ *entre* $5y-4+y^{3}-2y^{2}$
5. $3a^{3}-3+6a^{7}-12a^{6}-6a^{2}+6a^{4}$ *entre* $6a^{4}-3$
6. $-3+6x^{4}-6x^{2}-3x^{2}+6x^{7}+12x^{6}$ *entre* $x^{3}+2x^{2}+1$